اعداد مختلط: همه ما با مجموعه‌های مانند اعداد حقیقی، اعداد صحیح، اعداد طبیعی، اعداد گنگ، اعداد گویا و اعداد حسابی آشنا هستیم. فرض کنید می‌خواهیم معادله $x^2+1=0$ را حل کنیم، داریم $x^2=-1$ که این معادله در مجموعه‌های اعدادی که تاکنون با آن‌ها آشنا شده‌ایم فاقد جواب است. برای حل این مشکل مجموعه جدیدی به نام مجموعه اعداد مختلط معرفی گردید. در این مجموعه، عدد موهومی i با خاصیت $i^2=-1$ تعریف می‌شود. فرم کلی نمایش یک عدد مختلط به صورت $z = x + iy$ می‌باشد و مجموعه اعداد مختلط را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

x: حقیقی ← $Re(z)$ ← Real

y: موهومی → $Im(z)$ → Image

$$\mathbb{C}=\{z \mid z=x+iy,\ i^2=-1,\ x,y\in\mathbb{R}\}$$

مثال ۱: قسمت حقیقی و موهومی اعداد مختلط زیر را مشخص کنید.

A) $z=1+i$ $\quad Re(z)=1 \quad Im(z)=1$

B) $z=\sqrt{3}-2i$ $\quad Re(z)=\sqrt{3} \quad Im(z)=-2$

C) $z=i$ $\quad Re(z)=0 \quad Im(z)=1$ $\qquad$ D) $z=1$ $\quad Re(z)=1 \quad Im(z)=0$

نکته: هر عدد حقیقی یک عدد مختلط است که قسمت موهومی آن صفر است ($Im(z)=0$) اما هر عدد مختلط یک عدد حقیقی نمی‌باشد. $\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$

تساوی دو عدد مختلط: دو عدد مختلط را مساوی گوییم هرگاه قسمت‌های حقیقی آن با هم و قسمت‌های موهومی آن‌ها نیز با هم برابر باشند:

$$z_1=x_1+iy_1,\quad z_2=x_2+iy_2$$

$$z_1=z_2 \Leftrightarrow \begin{cases} Re(z_1)=Re(z_2) \rightarrow x_1=x_2 \\ Im(z_1)=Im(z_2) \rightarrow y_1=y_2 \end{cases}$$

مثال ۲: پارامتر α را طوری پیدا کنید که اعداد مختلط z_1 و z_2 با هم برابر باشند.

$z_1=\dfrac{1+i}{3} \qquad z_2=\alpha+\dfrac{1}{3}i \qquad Re(z_1)=Re(z_2)=\dfrac{1}{3}$

نکته: نماد $\Leftrightarrow$ (اگر و فقط اگر - شرط لازم و کافی) دو طرفه است.

عملیات جبری اعداد مختلط:

$z_1=x_1+iy_1 \qquad z_2=x_2+iy_2$

۱) عمل جمع (تفریق) : $z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$

2) عمل ضرب :

$$z_1 . z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 + ix_1y_2 + ix_2y_1 + \overset{-1}{i^2}y_1y_2 = x_1x_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1) - y_1y_2$$

مثال 3 : اعداد مختلط $z_1 = 1 + 2i$ و $z_2 = 1 - i$ را در نظر بگیرید. مطلوب است :

A) جمع : $z_1 + z_2 = 2 + i$

B) تفاضل : $z_1 - z_2 = 3i$

C) ضرب : $z_1 . z_2 = 1 + i - 2i^2 = 3 + i$

3) حاصل ضرب یک عدد ثابت در یک عدد مختلط : $a \in \mathbb{R}$, $az_1 = a(x_1 + iy_1) = ax_1 + iay_1$

مثال : $z = 1 + 2i$ $\quad 2z_1 = 2(1 + 2i) = 2 + 4i$

برخی نکات درباره اعداد مختلط :

1. جمع اعداد مختلط خاصیت جابه‌جایی دارند، یعنی : $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$

2. ضرب دو عدد مختلط خاصیت جابه‌جایی دارند، یعنی : $z_1 . z_2 = z_2 . z_1$

3. برای مجموعه اعداد مختلط نیز عضو خنثی جمع عدد صفر است، یعنی : $z + 0 = 0 + z = z$

4. عضو خنثی ضرب اعداد مختلط عدد یک است، یعنی : $z . 1 = 1 . z = z$

نکته : عضو خنثی به معنای عضوی است که روی عملیاتی که انجام می‌گیرد تأثیری نگذارد.

5. خاصیت شرکت‌پذیری : $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$

توان در اعداد مختلط : $z^0 = 1 \quad z^1 = z \quad z^2 = z . z \quad z^3 = z . z^2$

$z^n = z . z^{n-1}$

مثال 4: اگر $z = 1 + i$ باشد حاصل z^2 را بیابید. $z^2 = 1 + 2i + i^2 = 2i$

وارون یک عدد مختلط: $z = x + iy \rightarrow z^{-1} = a + ib$

وارون عدد مختلط $z = x + iy$ را با z^{-1} نمایش می‌دهیم و برای محاسبه آن داریم $z^{-1}.z = 1$ با فرض اینکه $z^{-1} = a + ib$ داریم:

$$zz^{-1} = 1 \qquad (x + iy)(a + ib) = 1$$
$$(ax - by) + i(xb + ya) = 1 + 0i$$

$$\begin{cases} xa - yb = 1 & \times -y \\ xb + ya = 0 & \times x \end{cases}$$

$$\cancel{-axy} + x^2 b + y^2 b + \cancel{axy} = -y$$

بنابراین وارون عدد مختلط z برابر است با: $a = \frac{x}{x^2 + y^2}$ ، $b = \frac{-y}{x^2 + y^2}$

$$z^{-1} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i\frac{-y}{x^2 + y^2}$$

مثال 5: کسر مختلط زیر را با استفاده از روش وارون ساده کنید.

$$\frac{1+i}{1-i} = (1+i)(1-i)^{-1} = (1+i)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \frac{1}{2}i + \frac{1}{2}i = i$$

مثال 6: وارون اعداد مختلط زیر را محاسبه کنید.

A) $z = \sqrt{3} - i$ $\qquad z^{-1} = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}i = \frac{1}{4}(\sqrt{3} + i)$

B) $z = -i$ $\qquad z^{-1} = i \qquad zz^{-1} = -i^2 = 1$

تست C) $z = \frac{5 + 4i}{3 - i}$ $\qquad z^{-1} = \frac{3 - i}{5 + 4i} = (3 - i)(5 + 4i)^{-1} = (3 - i)\left(\frac{5}{41} + \frac{-4}{41}i\right) = \frac{1}{41}(11 - 17i)$

مثال 7: عبارت زیر را ساده کنید.

$$z = \frac{i^{80} - i + 1}{i^4 + 1} = \frac{1 - i + 1}{1 + 1} = \frac{2 - i}{2} = 1 - \frac{i}{2}$$

مزدوج یک عدد مختلط:

فرض کنید عدد مختلط $z = x + iy$ داده شده باشد برای محاسبه مزدوج این عدد کافی است قسمت موهومی را قرینه کنیم بنابراین

مزدوج عدد مختلط z عبارت است از: $\bar{z} = x - iy$

نکته: $z.\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - i^2 y^2 = x^2 + y^2$

از نکته صفحه قبل می‌توان برای ساده کردن کسرهای مختلط استفاده کرد کافی است صورت و مخرج کسر را در مزدوج مخرج ضرب کنیم تا کسر ساده گردد.

مثال 8: کسر زیر را ساده کنید. (از روش مزدوج)

$$Z = \frac{1+i}{1-i} \times \frac{(1+i)}{(1+i)} = \frac{(1+i)^2}{1-i^2} = \frac{2i}{2} = i$$

نکاتی درباره مزدوج اعداد مختلط:

1. $\overline{\overline{Z}} = Z$

2. $\overline{Z_1 \pm Z_2} = \overline{Z_1} \pm \overline{Z_2}$

3. $\overline{Z_1 \cdot Z_2} = \overline{Z_1} \cdot \overline{Z_2}$

4. $\overline{\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)} = \frac{\overline{Z_1}}{\overline{Z_2}}$

5. $\overline{\alpha Z} = \alpha \overline{Z} \qquad \alpha \in R$

مثال 9: درستی رابطه زیر را ثابت کنید.

$$\frac{\sqrt{1+x^2}+ix}{x-i\sqrt{1+x^2}} = i \qquad \frac{\sqrt{1+x^2}+ix}{x-i\sqrt{1+x^2}} \times \frac{x+i\sqrt{1+x^2}}{x+i\sqrt{1+x^2}} = \frac{i(1+2x^2)}{1+2x^2} = i$$

مثال 10: عبارت زیر را ساده کنید.

$$\frac{(1+i)^{101}}{(1-i)^{57}} = \frac{(1+i)^{57}(1+i)^{44}}{(1-i)^{57}} = \underset{i}{i^{57}} \times \underset{2^{22} \times i^{22}}{\left((1+i)^2\right)^{22}} = -2^{22} i$$

اندازه یک عدد مختلط: فرض کنید عدد مختلط $Z = x+iy$ داده شده باشد برای محاسبه اندازه این عدد از رابطه زیر استفاده می‌کنیم

$$Z = x+iy \qquad |Z| = \sqrt{Re(Z)^2 + Im(Z)^2} = \sqrt{x^2+y^2}$$

نکاتی درباره اندازه اعداد مختلط:

1. $\left|\frac{Z_1}{Z_2}\right| = \frac{|Z_1|}{|Z_2|}$

2. $|Z_1 \cdot Z_2| = |Z_1| \cdot |Z_2|$

3. $|\overline{Z}| = |Z|$

4. $Z\overline{Z} = |Z|^2 \rightarrow x^2+y^2$

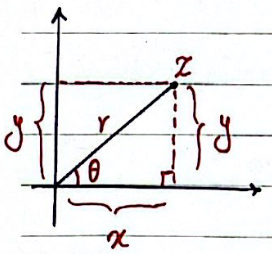
5. نامساوی مثلثی: $|z_1+z_2| \le |z_1|+|z_2|$

مثال 11: مکان هندسی مجموعه زیر را مشخص کنید.

$A=\{z \mid \left|\frac{z-i}{z+i}\right| \le 2 ,\ z=x+iy\}$ $\qquad 0 \le x^2+y^2+\frac{10}{3}y+1$

فرم مثلثاتی اعداد مختلط:

فرض کنید عدد مختلط $z=x+iy$ را به صورت بردار روبه رو رسم کرده ایم.



$$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \\ tg\theta=\frac{y}{x} \\ r=\sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$$

در این مثال r همان اندازه عدد مختلط و θ زاویه ای است که عدد مختلط با قسمت مثبت محور x ها می سازد. چون رابطه بالا برقرار خواهد بود. بنابراین جایگذاری در فرم $z=x+iy$ نتیجه می شود:

$z=r\cos\theta+i(r\sin\theta)$

$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ فرم مثلثاتی

نکته: $\cos\theta+i\sin\theta=cis\theta$ سیس تتا

نکته: $\cos\theta+i\sin\theta=e^{i\theta}$

$z=re^{i\theta}$ فرم اویلری

مثال 12: فرم مثلثاتی و فرم اویلری اعداد مختلط زیر را بنویسید.

A) $z=1+i$

$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$ $\qquad tg\theta=\frac{y}{x}=\frac{1}{1}=1$ $\qquad \theta=\frac{\pi}{4}$

مثلثاتی: $z=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ $\qquad$ اویلری: $z=\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$

نکات مهم در نوشتن فرم مثلثاتی: در به دست آوردن $tg\theta=\frac{y}{x}$ دقت کنید برای یافتن θ دقت کنید $\sin$ و $\cos$ چگونه هستند

B) $z = -i \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases}$

$r = \sqrt{x^2 + y^2} = 1 \qquad tg\,\theta =$ ت.ن $\qquad \theta = \frac{3\pi}{2}$

مثلثاتی : $z = \left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$ $\qquad$ اویلری : $z = e^{\frac{3\pi}{2}i}$

C) $z = 1 - i \quad \begin{cases} x = 1 = \cos \\ y = -1 = \sin \end{cases}$

$r = \sqrt{2} \qquad tg\,\theta = -1 \qquad \theta = \frac{7\pi}{4}$

مثلثاتی : $z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$ $\qquad$ اویلری : $z = \sqrt{2}\, e^{\frac{7\pi}{4}i}$

D) $z = 1 \quad \begin{cases} x = 1 = \cos \\ y = 0 = \sin \end{cases}$

$r = 1 \qquad tg\,\theta = 0 \qquad \theta = 0$ یا 2π

مثلثاتی : $z = (\underbrace{\cos 0}_{1} + \underbrace{i\sin 0}_{0}) = 1$ $\qquad$ اویلری : $z = e^{0i} = 1$

نکته: وقتی می‌خواهیم زاویه‌ای را پیدا کنیم که حاصل $tg\,\theta$ را به ما می‌دهد قرارداد می‌کنیم که فقط از زوایای مثبت $0 < \theta < 2\pi$ استفاده کنیم.

صورت توان برای اعداد مختلط : (رابطه دموآور)

$z^{n} = r^{n}(\cos n\theta + \sin n\theta\, i)$

مثال 13: عبارت زیر را ساده کنید.

$r = \sqrt{1+3} = 2 \qquad tg\,\theta = \sqrt{3} \qquad \theta = \frac{\pi}{3}$

$(1 + i\sqrt{3})^{-10} = \qquad z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) \qquad z^{-10} = 2^{-10}\left(\cos -10\times\frac{\pi}{3} + i\sin -10\times\frac{\pi}{3}\right)$

$= \left(\frac{1}{2}\right)^{10}\left(\cos 10\frac{\pi}{3} - i\sin 10\frac{\pi}{3}\right)$

مثال 14: عبارت زیر را ساده کنید.

$r_1 = \sqrt{2} \qquad \theta_1 = \frac{\pi}{4} \qquad r_2 = 2 \qquad \theta_2 = \frac{11\pi}{6}$

$\frac{1+i}{\sqrt{3}-i} = \frac{\sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}}}{2\, e^{i\frac{11\pi}{6}}} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{19\pi}{12}i}$

نکته: رابطه دموآور برای n های منفی نیز برقرار است.

$\sqrt{4} = \pm 2$

مثال 15: عبارت زیر را ساده کنید.

$r_1 = 2 \quad \theta_1 = \frac{\pi}{3} \quad r_2 = 2 \quad \theta_2 = \frac{5\pi}{3}$

$$\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}\right)^{10} = \left(\frac{2e^{\frac{\pi}{3}i}}{2e^{\frac{5\pi}{3}i}}\right)^{10} = \left(e^{-\frac{4\pi}{3}i}\right)^{10} = e^{-\frac{40\pi}{3}i} = \cos\left(\frac{-40\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{-40\pi}{3}\right) = \cos\frac{4\pi}{3} - i\sin\frac{4\pi}{3}$$

آرگومان (Arg): آرگومان یک عدد مختلط همان زاویه ای است که بردار عدد مختلط با قسمت مثبت محور x ها می سازد.

مثلا اگر داشته باشیم $tg(\theta) = 1$ آنگاه زاویه θ می تواند برابر با $\ldots, \frac{\pi}{4}, 2\pi + \frac{\pi}{4}$ و همین طور $2k\pi + \frac{\pi}{4}$

همه این ها را یک آرگومان برای θ می گوییم و زاویه ای که به صورت $0 \leq \theta < 2\pi$ باشد را آرگومان اصلی عدد z می نامیم.

محاسبه ریشه n ام یک عدد مختلط: عدد مختلط $z = x + iy$ که برابر است با $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ را در نظر بگیرید فرض کنید w ریشه n ام عدد z یعنی $\sqrt[n]{z} = w \rightarrow w^n = z$. در فضای اعداد مختلط برخلاف مجموعه اعداد حقیقی هر عدد دارای ریشه n ام می باشد و تعداد این ریشه ها دقیقا n تا است همچنین این ریشه ها منحصر به فرد می باشند از آنجا که w ریشه n ام z است می توان آن را نیز به صورت یک عدد مختلط نشان داد. داریم:

$w = \sqrt[n]{z} \qquad w^n = z \qquad w = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

از رابطه دموآور داریم:

$w^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$

با استفاده از تساوی دو عدد مختلط نتیجه می گیریم:

$$w^n = z \begin{cases} r = \rho^n \rightarrow \rho = \sqrt[n]{r} \\ \cos\theta = \cos n\varphi \\ \sin\theta = \sin n\varphi \end{cases} \quad \varphi = \frac{2k\pi + \theta}{n} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

بنابراین فرمول محاسبه ریشه n ام یک عدد مختلط عبارت است از:

$$w_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{2k\pi + \theta}{n} + i\sin\frac{2k\pi + \theta}{n}\right) \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

ریشه n ام

به عبارت دیگر ریشه ها را می توان به صورت زیر نوشت:

$$w_0 = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta}{n} + i\sin\frac{\theta}{n}\right) \qquad w_1 = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{2\pi + \theta}{n} + i\sin\frac{2\pi + \theta}{n}\right)$$

$$w_{n-1} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{2(n-1)\pi + \theta}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2(n-1)\pi + \theta}{n}\right)\right)$$

مثال 16: ریشه‌های چهارم عدد ۱ را پیدا کنید.

$Z = 1 = 1 + i0 \quad \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \quad r = 1 \quad tg\theta = 0 \quad \theta = 0$

$Z = 1(\cos 0 + i \sin 0)$

$Z^4 = 1$ معنای دیگر سوال: $Z^4 - 1 = 0$ ، $\sqrt[4]{1}$

ریشه‌ها:

$$\begin{cases} w_0 = \sqrt[4]{1}\left(\cos \frac{0}{4} + i \sin \frac{0}{4}\right) = 1 \\ w_1 = \sqrt[4]{1}\left(\cos \frac{0 + 2\pi}{4} + i \sin \frac{0 + 2\pi}{4}\right) = i \\ w_2 = 1\left(\cos \frac{0 + 4\pi}{4} + i \sin \left(\frac{4\pi}{4}\right)\right) = -1 \\ w_3 = 1\left(\cos \frac{0 + 6\pi}{4} + i \sin \left(\frac{6\pi}{4}\right)\right) = -i \end{cases}$$

1. نکته: اندازه تمام ریشه‌های هر عدد مختلط باهم برابر است.

2. نکته: اختلاف بین آرگومان یا زاویه دو ریشه متوالی از رابطه $\frac{2\pi}{n}$ پیروی می‌کند.

مثال 17: ریشه‌های دوم -1 را پیدا کنید.

$Z = \underset{x}{-1} + \underset{y}{0}i \quad r = 1 \quad tg\theta = 0 \quad \theta = \pi$

$$w_k = \sqrt[2]{1}\left(\cos \frac{2k\pi + \pi}{2} + i \sin \frac{2k\pi + \pi}{2}\right)$$

$$w_0 = \sqrt[2]{1}\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right) = i \qquad w_1 = \sqrt[2]{1}\left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}\right) = -i$$

مثال 18: عبارت زیر را حل کنید.

$$\sqrt[3]{\frac{1+i}{1-i}} = \sqrt[3]{\frac{1+i}{1-i} \times \frac{1+i}{1+i}} = \sqrt[3]{\frac{2i}{2}} = \sqrt[3]{i} \qquad R = 1 \quad tg = \text{تن} \quad \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$w_0 = \sqrt[3]{1}\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3} + i}{2}$$

$$w_1 = \sqrt[3]{1}\left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6}\right) = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$$

$$w_2 = \sqrt[3]{1}\left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}\right) = -i$$

مثال 19: عبارت زیر را حل کنید.

$r = 2 \quad tg\theta = \sqrt{3} \quad \theta = \frac{\pi}{3} \qquad n = 5$

$(1 + \sqrt{3}i)^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{1 + \sqrt{3}i}$

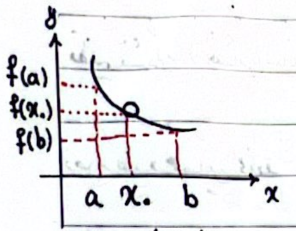
$$w_0 = \sqrt[5]{2}\left(\cos \frac{\pi}{15} + i \sin \frac{\pi}{15}\right)$$

$$w_1 = \sqrt[5]{2}\left(\cos \frac{7\pi}{15} + i \sin \frac{7\pi}{15}\right)$$

$$w_2 = \sqrt[5]{2}\left(\cos \frac{13\pi}{15} + i \sin \frac{13\pi}{15}\right)$$

$$w_3 = \sqrt[5]{2}\left(\cos \frac{19\pi}{15} + i \sin \frac{19\pi}{15}\right)$$

$$w_4 = \sqrt[5]{2}\left(\cos \frac{25\pi}{15} + i \sin \frac{25\pi}{15}\right)$$



حد پیوستگی : $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

بازه (a,b) یک همسایگی متقارن و محذوف به مرکز x_0 است.

همانطور که در شکل مشاهده می کنید اگر بازه (a,b) را به اندازه کافی کوچک کنیم یعنی از نقاط a و b به سمت نقطه x_0 حرکت کنیم آنگاه

مقدار تابع نیز به سمت $f(x_0)$ میل می کند به عبارت ریاضی داریم $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

خواص حد :

1. حد تابع ثابت $(f(x)=c)$: $\lim_{x\to x_0} f(x)=c$

2. حد تابع همانی $(f(x)=x)$: $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)=x_0$

3 حاصل حد در صورت وجود منحصر به فرد است.

4. فرض کنید حد $\lim_{x\to x_0} f(x)=L_1$ ، $\lim_{x\to x_0} f(x)=L_2$ باشد آنگاه:

A) $\lim_{x\to x_0} f(x)+g(x)=\lim_{x\to x_0} f(x)+\lim_{x\to x_0} g(x)=L_1+L_2$

B) $\lim_{x\to x_0} f(x).g(x)=\lim_{x\to x_0} f(x).\lim_{x\to x_0} g(x)=L_1.L_2$

C) $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)}=\frac{L_1}{L_2}$ $(L_2\neq 0)$

D) $\lim_{x\to x_0} kf(x)=k\lim_{x\to x_0} f(x)=kL_1$

E) $\lim_{x\to x_0} \sqrt[m]{f(x)^n}=\sqrt[m]{L_1^n}$

تعریف: تابع $f(x)$ را کران دار گوییم هرگاه $\exists M>0 ,\ \forall x : |f(x)|<M$ مثلاً توابع $\sin x$ ، $\cos x$ توابعی کران دار هستند.

قضیه: فرض کنید $f(x)$ تابعی کران دار باشد. اگر $\lim_{x\to a} g(x)=0$ آنگاه $\lim_{x\to a} \underbrace{f(x)}_{\text{کران دار}}.g(x)=0\times$ کران دار $=0$.

مثال: حاصل حد زیر را محاسبه کنید.

$$\lim_{x\to 2} \underbrace{(x-2)}_{0}.\underbrace{\sin\frac{1}{\sqrt{x}}}_{\text{تابع کران دار}} = 0\times \text{کران دار} = 0$$

PILLNOTEBOOK

قضیه فشردگی (فشار یا ساندویچ):

فرض کنید در همسایگی محذوف نقطه A داریم $h(x) \le f(x) \le g(x)$ که در آن $\lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} h(x) = C$ آنگاه می‌توان نتیجه

گرفت: $\lim_{x \to a} f(x) = C$

مثال: $\frac{1}{x} - 1 < [\frac{1}{x}] \le \frac{1}{x} \xrightarrow[x>0]{\times x} \underbrace{1 - x}_{1} < x[\frac{1}{x}] \le \underbrace{x}_{1}$ فشردگی $\lim_{x \to 0} x[\frac{1}{x}] = 1$

این فرض از کمیت مسئله کم نمی‌کند

$\xrightarrow[x<0]{\times x} \underbrace{1 - x}_{1} > x[\frac{1}{x}] \ge \underbrace{x}_{1}$ این فرض از کمیت مسئله کم نمی‌کند

فرم کلی چندجمله‌ای ها و حد آن ها: $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$ $\lim_{x \to c} p(x) = p(c)$

$\lim_{x \to c} \frac{p(x)}{Q(x)} = \frac{p(c)}{Q(c)}$ $(Q(c) \neq 0)$

حد یک طرفه: (حد راست):

گوییم تابع $f(x)$ حد راست دارد اگر از سمت اعداد بزرگتر از a به سوی نقطه مورد نظر حرکت کنیم حد موجود باشد یعنی: $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$

(حد چپ):

حد چپ تابع $f(x)$ موجود است هرگاه: $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$

قضیه حدود یک طرفه: گوییم تابع $f(x)$ حد دارد هرگاه حدود چپ و راست موجود و هم برابر باشند.

$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = L$ $\lim_{x \to a} f(x) = L$

نکته: توابع خاصی که لازم است برای حدود چپ و راست محاسبه شود عبارتند از تابع جزء صحیح، تابع قدر مطلق، تابع چند ضابطه‌ای و توابع رادیکالی

با فرجه زوج.

PILLNOTEBOOK

مثال: حاصل حدهای زیر را محاسبه کنید.

1) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{[x]-3}{x-3} = \begin{cases} \text{حد چپ}: \lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{[x]-3}{x-3} = \dfrac{-1}{0^-} = +\infty \\ \text{حد راست}: \lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{[x]-3}{x-3} = \dfrac{0 \text{ مطلق}}{0^+} = 0 \end{cases}$

تابع $\dfrac{[x]-3}{x-3}$ در نقطه $x=3$ حد ندارد

2) $\lim\limits_{x\to 2} |x-1| = 1$

3) $\lim\limits_{x\to 1^-} |x-1| = \lim\limits_{x\to 1^-} -(x-1) = 0$

4) $f(x) = \begin{cases} 3x^2+5x+1 & x<1 \\ 6x^2+3x & x>1 \end{cases}$

$\begin{cases} \text{حد چپ}: \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} 3x^2+5x+1 = 9 \\ \text{حد راست}: \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} 6x^2+3x = 9 \end{cases} \to \lim\limits_{x\to 1} f(x) = 9$

یادآوری: $\dfrac{\text{عدد}}{\text{بی‌نهایت}} = 0$ $\qquad \dfrac{\text{عدد}}{\text{صفر}} = \infty$

همانطور که حاصل حد را در نقطه حساب می‌کنیم می‌توان حاصل حد در بی‌نهایت نیز محاسبه کرد داریم:

حد بی‌نهایت: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ $\qquad$ حد بی‌نهایت: $\qquad$ حد بی‌نهایت در بی‌نهایت: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = (\pm\infty)$

L (عدد)

مثال: حاصل حدهای زیر را محاسبه کنید.

1) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{3x^2+5x}{x-1} = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{3x^2}{x} = 3x = -\infty$

2) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{4x^4+5x^2+1}}{3x^6+8} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{4x^4}}{3x^6} = \dfrac{|2x^2|}{3x^6} = \dfrac{2}{3x^4} = 0$

3) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{5x^4+3x^2-1}{-4x^4+1} = \dfrac{5\cancel{x^4}}{-4\cancel{x^4}} = -\dfrac{5}{4}$

کاربردهای حد:

1. مجانب قائم: گوییم $x=a$ مجانب قائم تابع $f(x)$ است هرگاه: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$.

2. مجانب افقی: گوییم $y=b$ مجانب افقی تابع $f(x)$ است هرگاه: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = b$.

3. مجانب مایل: $y=ax+b$ $(a\neq 0)$ را مجانب مایل تابع $f(x)$ گوییم که در آن

$a = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ ، $b = \lim\limits_{x\to\pm\infty} (f(x)-ax)$

مثال: مجانب قائم، افقی و مایل $f(x)$ را به دست آورید. $f(x) = \dfrac{x^3-1}{2x^2-1}$

1) مجانب قائم: $2x^2-1=0$ $\quad 2x^2-1 \quad x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2} \quad \lim\limits_{x\to\pm\frac{\sqrt{2}}{2}} f(x) = \infty \quad x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ مجانب قائم

2) مجانب افقی: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3-1}{2x^2-1} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3}{2x^2} = \infty$ مجانب افقی ندارد.

3) مجانب مایل: $a = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{x^3-1}{2x^2-1}}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3-1}{2x^3-x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3}{2x^3} = \dfrac{1}{2} \to y = \dfrac{1}{2}x$

$$b = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3-1}{2x^2-1} - \frac{1}{2}x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^3-2-2x^3+x}{2(2x^2-1)} = \frac{-2+x}{4x^2-2} = \frac{x}{4x^2} = \frac{1}{4x} = \frac{1}{\infty} = 0$$

پیوستگی:

تابع $f(x)$ را در نقطه $x=a$ پیوسته گوییم هرگاه ۳ شرط زیر برقرار باشد:

1. $x = a \in D_f$ (تابع $f(x)$ در $x=a$ تعریف شده باشد) رفع نشدنی

2. حد تابع در $x=a$ موجود باشد یعنی: رفع نشدنی $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) = L$

3. $f(a) = \lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ ← مقدار تابع در نقطه $x=a$ رفع شدنی

نکته: چنان چه بتوان با اعمال شرایطی ناپیوستگی تابع را در نقطه مورد نظر رفع نمود می گوییم ناپیوستگی تابع رفع شدنی است و به این عمل گسترش پیوستگی می گوییم در غیر این صورت ناپیوستگی را رفع نشدنی گوییم.

مثال: پیوستگی توابع زیر را در نقطه داده شده بررسی کنید و چنان چه تابع مورد نظر ناپیوسته بود نوع ناپیوستگی را مشخص کنید.

1) $f(x) = \dfrac{3x+3}{x^2-1}$ $\quad x_0 = -1 \quad$ ① $D_f = R - \{1,-1\}$ $\quad 1 \notin D_f$ تابع f در $x=-1$ ناپیوسته

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x+3}{x^2-1} & x_0 \neq -1 \\ \dfrac{-3}{2} & x_0 = -1 \end{cases}$$

با اضافه کردن این شرط ناپیوستگی را رفع کردم

② $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3(\cancel{x+1})}{(\cancel{x+1})(x-1)} = \dfrac{-3}{2}$ $\qquad$ ③ $f(-1) = \dfrac{-3}{2} = \lim\limits_{x\to -1} f(x)$

نکته: برای حل مشکل ناپیوستگی (از نوع دامنه) شرط گذاری می کنیم

$$2)\ f(x)=\begin{cases} x^2-1 & x<1 \\ 0 & x=1 \\ 5x-3 & x>1 \end{cases}$$

① $D_f=\mathbb{R}$ $\quad x_0=1\in D_f$ ✓

② چپ: $\lim_{x\to 1^-} x^2-1=0$ $\qquad$ راست: $\lim_{x\to 1^+} 5x-3=2$

تابع $f(x)$ در $x_0=1$ ناپیوسته است زیرا $\lim_{x\to 1} f(x)$ موجود نیست و این نوع رفع نشدنی است (اما در $x_0=1$ پیوستگی چپ دارد)

پیوستگی چپ: تابع $f(x)$ را در $x=a$ پیوسته چپ گوییم هرگاه: $\lim_{x\to a^-} f(x)=f(a)$ ← (تغییر در شرط دوم پیوستگی)

پیوستگی راست: تابع $f(x)$ را در $x=a$ پیوسته راست گوییم هرگاه: $\lim_{x\to a^+} f(x)=f(a)$

قضیه مقدار میانی: فرض کنید $f(x)$ بر بازه $[a,b]$ پیوسته باشد و $f(a)\neq f(b)$ آنگاه تابع $f(x)$ تمام مقادیر میان بازه $[f(a),f(b)]$ را اختیار می‌کند، به عبارت ریاضی داریم:

$$\forall y\in[f(a),f(b)]\quad \exists c\in[a,b]:\ f(c)=y$$

نتیجه قضیه مقدار میانی: (قضیه بولزانو)

اگر $f(x)$ بر $[a,b]$ پیوسته باشد و $f(a)f(b)<0$ آنگاه معادله $f(x)=0$ حداقل یک ریشه دارد.

مقادیر به ازای a و b مختلف العلامه

مثال: در عبارت مقابل به سوالات زیر پاسخ دهید. $\quad f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)+x^2$

الف) آیا در بازه $[0,1]$ تابع $f(x)=0$ ریشه دارد؟

$$\left.\begin{matrix} f(0)=-6 \\ f(1)=1 \end{matrix}\right\}\ \underbrace{f(0)f(1)}_{-6}<0$$

$f(x)$ چندجمله‌ای در کل $\mathbb{R}$ پیوسته است پس در $[0,1]$ نیز پیوسته است

پس تابع $f(x)=0$ در $[0,1]$ حداقل یک ریشه دارد

ب) آیا خط $y=\sqrt{17}$ نمودار تابع را در $[2,3]$ قطع می‌کند؟

$f(2)=4$

$f(3)=9$

تابع $f(x)$ بر $[2,3]$ پیوسته است (چندجمله‌ای) و $f(2)\neq f(3)$ پس قضیه مقدار میانی برقرار است چون $4<\sqrt{17}<9$

$f(y)=\sqrt{17}$

مثال: نشان دهید نمودار $y = \cos(2\pi x) - 3x^2$ محور x ها را حداقل در یک نقطه از بازه $[0,1]$ قطع کند.

قطع کردن نمودار در یک نقطه: ریشه داشتن معادله $y = 0$

$f(0) = 1$ $\qquad$ $f(1) = 1 - 3 = -2$

$f(0)f(1) < 0$

تابع y در بازه $[0,1]$ پیوسته است / شرایط قضیه بولتزانو برقرار است پس $y = 0$ محور x ها را در $[0,1]$ حداقل در یک نقطه قطع می‌کند

مشتق: مفهوم مشتق با دو عبارت شیب تابع و سرعت لحظه‌ای یک متحرک مرتبط است برای تعریف مشتق می‌توان از دو تعریف حدی زیر کمک گرفت.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \qquad f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

مشتقات یک طرفه: همانند حد برای مشتق نیز می‌توان مشتقات چپ و راست تعریف کرد داریم:

مشتق راست: $f'_+(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

مشتق چپ: $f'_-(a)=\lim_{x\to a^-}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

گوییم تابع $f(x)$ در نقطه $x=a$ مشتق‌پذیر است هرگاه در آن نقطه مشتقات چپ و راست موجود و باهم برابر باشند یعنی: $f'_+(a)=f'_-(a)$

نکته: اگر تابع $f(x)$ در نقطه $x=a$ مشتق‌پذیر باشد می‌توان گفت تابع $f(x)$ در نقطه $x=a$ پیوسته بوده است اما عکس این رابطه الزاماً برقرار نیست پس برای بررسی مشتق‌پذیری یک تابع در نقطه داده شده نخست لازم است پیوستگی آن را بررسی کنیم و درصورت برقراری پیوستگی شرط مشتق‌پذیری را چک کنیم.

نمادهای زیر برای بیان مفهوم مشتق استفاده می‌شود:

$$f'(x)=\frac{d}{dx}f(x)=D_{f(x)}=\frac{dy}{dx} \quad y=f(x)$$

فرمول‌های مشتق‌گیری:

$(c)'=0$

$(u^n)'=nu^{n-1}\times u'$ ← (u تابعی براساس x است)

$(\sin x)'=\cos x \qquad (\cos x)'=-\sin x \qquad (tg\,x)'=1+tg^2x$

$(\cot x)'=-(1+\cot g^2 x) \qquad (e^x)'=e^x$

نکته: $\sec x=\frac{1}{\cos x} \qquad \csc x=\frac{1}{\sin x}$

درادامه: $(\sec x)'=\sec x\, tg\,x \qquad (\csc x)'=-\cot g\,x \csc x$

یادآوری: مشتق حاصل ضرب دو تابع → $(f(x).g(x))'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

مشتق حاصل تقسیم دو تابع کسری → $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$

« مشتق تابع مرکب : » $(fog(x))' = g'(x).f'(g(x))$ $\quad fog(x) = f(g(x))$

تابع زنجیره‌ای $fog(x) = \sin(\cos x)$ $\quad g(x) = \cos x$ $\quad f(x) = \sin(g(x))$

$(fog)'(x) = (-\sin x)\cos(\cos x)$

می‌دانیم تعریف تابع مرکب به صورت $fog(x) = f(g(x))$ است. برای محاسبه مشتق تابع مرکب با فرض آنکه $g(x)$ موجود باشد و $f(x)$ به ازای تابع $g(x)$ مشتق پذیر باشد داریم : $(fog(x))' = g'(x).f'(g(x))$

مثال: اگر $f(u) = u^2 + 5u + 5$ و $g(x) = \frac{x+1}{x-1}$ مطلوب است محاسبه $(fog)'(x)$.

$$(fog(x))' = g'(x).f'(g(x)) = \frac{-2}{(x-1)^2} \cdot \left(2\left(\frac{x+1}{x-1}\right)+5\right)$$

مثال: اگر $f(x^3 + 6x) = g(\sin 4x + \sin 2x)$ و $f'(0) = 5$ مطلوب است محاسبه $g'(0)$.

$$f(x^3 + 6x) = g(\sin 4x + \sin 2x) \xrightarrow{'} (3x^2+6)f'(x^3+6x) = (4\cos 4x + 2\cos 2x)g'(\sin 4x + \sin 2x)$$

$$\xrightarrow{x=0} 6f'(0) = (4\cos 0 + 2\cos 0)\, g'(\sin 0 + \sin 0) \to \cancel{6}\underbrace{f'(0)}_{5} = \cancel{6}g'(0) \qquad g'(0) = 5$$

مثال: فرض کنید f تابعی دوبار مشتق پذیر باشد و $f(0) = f'(0) = 1$ و $f''(0) = 3$ و $g(x) = f(xf(x))$ مطلوب است محاسبه $g''(0)$.

5

مشتق تابع ضمنی : در بسیاری از توابع از دو یا چند متغیر استفاده می‌شود که در آن یک متغیر مستقل است و متغیر دیگر متغیر وابسته است. متغیر وابسته متغیری است که بر اساس یک متغیر دیگر نوشته می‌شود. فرض کنید x را متغیر مستقل و y را متغیر وابسته در نظر بگیریم. این نوع توابع را توابع ضمنی گوییم و به صورت $F(x, y) = 0$ نشان می‌دهیم چون که در این توابع نتوان صراحتاً y را بر اساس x نوشت برای مشتق گیری از رابطه $F'(x,y) = \frac{-F_x}{g_x}$ استفاده می‌کنیم.

مثال: مشتق تابع ضمنی زیر را بیابید.

$F(x,y)=0 \qquad F'(x,y)=\dfrac{-F_x}{F_y}$ ← مشتق تابع f نسبت به x ؛ ← مشتق تابع f نسبت به y

$\rightarrow \sin(xy)+x^2-3y^3=0 \qquad (1\times y+x\times y')\cos(xy)+2x-9y^2y'=0$ ؛ $F'(x,y)=-\left(\dfrac{y\cos(xy)+2x}{x\cos(xy)-9y^2}\right)$

مثال: مشتق تابع ضمنی زیر را بیابید.

$y=\sqrt{\sin xy+\sqrt{\sin xy+\sqrt{\sin xy+\dots}}}$

$y^2=\sin xy+\underbrace{\sqrt{\sin xy+\sqrt{\sin xy+\dots}}}_{y} \qquad y^2=\sin xy+y \qquad y^2-\sin xy-y=0$

$F'(x,y)=-\dfrac{-y\cos xy}{2y-x\cos xy-1}=\dfrac{y\cos xy}{2y-x\cos xy-1}$

مثال: اگر $f(x)=x^5+x$ و $f(1)=2$ مطلوب است محاسبه $(f^{-1})'(2)$ ؟

$x^5+x=2 \qquad x=1 \qquad (f^{-1})'(2)=\dfrac{1}{f'(1)}=\dfrac{1}{5x^4+1}=\dfrac{1}{6}$: شیب خط مماس

شیب خط قائم : -6

مشتق تابع وارون یا معکوس: اگر تابع $f(x)$ در بازه $[a,b]$ وارون پذیر باشند آن گاه برای محاسبه مشتق تابع وارون با فرض اینکه $f'(x)\neq 0$ از رابطه زیر استفاده می کنیم.

$(f^{-1})'(y)=\dfrac{1}{f'(x)}$ زوج مرتب (x,y)

مثال: اگر $f(x)=(x^3+2)\,e^x$ مطلوب است محاسبه $(f^{-1})'(2)$ ؟ e^x در مشتق گیری در نظر گرفته می شود اما در محاسبات نادیده می گیریم

$x^3+2=2 \qquad x=0 \qquad (f^{-1})'(2)=\dfrac{1}{f'(0)}=\dfrac{1}{3x^2e^x+e^x(x^3+2)}=\dfrac{1}{2}$: شیب خط مماس

شیب خط قائم : -2

مثال: معادله تابع $f(x)=x^2-4x+7$ با دامنه $(2,+\infty)$ را وارون پذیر مطلوب است $(f^{-1})'(7)$ ؟

$x^2-4x+7=7$

$x(x-4)=0 \begin{cases} x=0 \ \times \\ x=4 \end{cases}$

$\dfrac{1}{f'(4)}=\dfrac{1}{2x-4}=\dfrac{1}{4}$: شیب خط مماس

شیب خط قائم : -4

مثال: در نقطه ای به طول ۱ واقع بر $2xy^3+3x^2y-4x-1=0$ خط مماس بر منحنی رسم شده است. مطلوب است شیب خط مماس و قائم ؟

تابع ضمنی ؛ جمع ضرایب = 0 ؛ $x=1$

$F'(x,y)=-\dfrac{F_x}{F_y}=-\dfrac{2y^3+6xy-4}{6xy^2+3x^2} \qquad \xrightarrow{x=1} 2y^3+3y-5=0 \rightarrow y=1 \qquad 4x+9y=13$

شیب خط مماس : $-\left(\dfrac{2+6-4}{6+3}\right)=\dfrac{-4}{9}$ ؛ شیب خط قائم : $\dfrac{9}{4}$

این تابع ضمنی است پس نیازی به نوشتن مشتق تابع وارون یا معکوس نمی باشند

معادله خط مماس و قائم بر یک منحنی : می‌دانیم برای نوشتن معادله خط لازم است دو نقطه از خط را داشته باشیم یا یک نقطه از خط و شیب خط را داشته باشیم پس با استفاده از رابطه $(y-y_0)=m(x-x_0)$ می‌توان معادله خط را نوشت در رابطه نوشته شده m شیب خط است برای یافتن شیب خط مماس کافی است از تابع مشتق بگیریم و مقدار مشتق را در نقطه داده شده محاسبه کنیم و برای محاسبه شیب خط قائم برعکس کافی است شیب خط مماس را معکوس و قرینه نماییم.

مشتقات مراتب بالاتر : از نمادهای زیر برای نمایش مشتقات استفاده می‌شود : $y', y'', y''', \dots, y^{(n)}$

$$\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}$$

مثال : مشتقات تابع زیر را تا مرتبه چهارم بنویسید.

$y=\cos x \qquad y'=-\sin x \qquad y''=-\cos x \qquad y'''=\sin x \qquad y^{(4)}=\cos x$

مثال : یک رابطه کلی برای مشتق مرتبه n ام تابع زیر پیدا کنید. $y=\frac{1}{a-x}$

دیفرانسیل : برای محاسبه دیفرانسیل تابع $y=f(x)$ از رابطه زیر استفاده می‌کنیم : $y=f(x)$

$df=f'(x)\cdot dx$ (دیفرانسیل متغیر × مشتق تابع = دیفرانسیل تابع)

مثال : دیفرانسیل تابع زیر را محاسبه کنید. $f(x)=3x^2+\sin x \qquad df=(6x+\cos x)\,dx$

آهنگ متغیر از تعریف حدی مشتق داریم : $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ → Δy

اگر قرار دهیم $f(x+\Delta x)-f(x)=\Delta y$ آنگاه حاصل $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ بیانگر آهنگ تغییر متوسط است.

در ۴ مسئله بالا، هر گاه از یک تغیر مشتق می‌گیریم می‌توانیم مشتق آن را به صورت $\frac{dx}{dt}$ بنویسیم

* مثال: مساحت یک دایره از طریق رابطه $S = \frac{\pi}{4}R^2$ با قطر دایره مربوط می‌شود. هنگامی که قطر دایره $10\,cm$ ($x=10$) است. مساحت با چه سرعتی نسبت به قطر تغییر می‌کند؟

$$\frac{dS}{dR} = \frac{\pi}{2}R \xrightarrow{R=10} \frac{dS}{dR} = \frac{\pi}{2} \times 10 = 5\pi$$

مشتق از تابع S نسبت به متغیر R

A) * مثال: ذره‌ای روی منحنی $f(x) = x^3 + x$ در ربع اول صفحه به گونه‌ای حرکت می‌کند که مولفه x آن با سرعت $10\,\frac{m}{s}$ افزایش می‌یابد. مطلوب است محاسبه آهنگ افزایش سرعت شیب خط واصل از این ذره به مبدا در نقطه ($x=3$).

B) $$m = \frac{y-y_0}{x-x_0} = \frac{y-0}{x-0} = \frac{x^3+x}{x} \rightarrow m = x^2+1 \qquad \frac{dm}{dt} = \frac{dm}{dx}\cdot\underbrace{\frac{dx}{dt}}_{\text{سرعت}} = (2x)\times 10 = 20\underset{3}{x} = 60$$

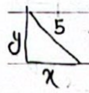
* مثال: درون ظرفی مخروطی شکل که به صورت وارون قرار گرفته است، آب با سرعت $3\,\frac{cm^3}{s}$ ($\frac{dv}{dt}$ بیان پرشدن حجم در لحظه) ریخته می‌شود. ارتفاع مخروط $10\,cm$ (h) و شعاع قاعده $5\,cm$ (r) باشد سرعت بالا آمدن ارتفاع سطح آب ($\frac{dh}{dt}$) در لحظه‌ای که آب در ارتفاع $6\,cm$ است را بیابید. حجم مخروط: $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

تغییرات h برزمان

تشابه: $\frac{h}{10} = \frac{x}{5} \qquad x = \frac{h}{2} \qquad V = \frac{1}{3}\pi x^2 h = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{h}{2}\right)^2 h = \frac{1}{12}\pi h^3 \xrightarrow{\text{مشتق گیری}} \frac{dv}{dt} = \frac{1}{4}\pi h^2\left(\frac{dh}{dt}\right)$

$$3 = \frac{1}{4}\pi(6)^2\left(\frac{dh}{dt}\right) \qquad \frac{dh}{dt} = \frac{12}{36\pi} = \frac{1}{3\pi}$$

* مثال: نردبانی به طول $5\,m$ به دیوار تکیه دارد. اگر پای نردبان در فاصله ۴ متری از دیوار قرار داشته باشد و با سرعت $0.6\,\frac{m}{s}$ ($\frac{dx}{dt}$) از دیوار دور شود انتهای نردبان با چه سرعتی به زمین نزدیک می‌شود؟



از قضیه فیثاغورث: 3

$$x^2 + y^2 = 25 \longrightarrow 2\overset{4}{x}\left(\overset{0.6}{\frac{dx}{dt}}\right) + 2\overset{3}{y}\left(\frac{dy}{dt}\right) = 0 \qquad \frac{dy}{dt} = -0.8$$

خطی سازی: برخی اوقات مقدار تابع در نقطه‌ای از ما خواسته می‌شود که نمی‌توان آن را به صورت مستقیم محاسبه نمود در این مواقع می‌توانیم با استفاده از مفهوم خطی سازی تقریبی برای این جواب پیدا کنیم. خطی سازی با استفاده از دو مفهوم حدی مشتق به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود.

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a) \xrightarrow{\text{معادل}} f(x)-f(a) \simeq f'(a)(x-a)$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = f'(x) \xrightarrow{\text{معادل}} f(x+\Delta x)-f(x) \simeq \Delta x f'(x)$$

مثال: حاصل $\sin 46^\circ$ را محاسبه کنید.

$$\underbrace{46^\circ}_{} = \underbrace{45^\circ}_{x} + \underbrace{1^\circ}_{\Delta x}$$

$$f(x) = \sin x \qquad f'(x) = \cos x \qquad f(45^\circ + 1^\circ) \simeq f(45^\circ) + 1^\circ(\cos 45^\circ)$$

$$\sin 46^\circ \simeq \sin 45^\circ + (1)(\cos 45^\circ) \simeq \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{180}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

تبدیل به رادیان شود

مثال: حاصل عبارت مقابل را به دست آورید. $\sqrt[3]{9}$

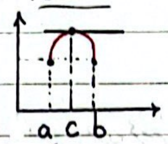
$f(x)=\sqrt[3]{x}=x^{\frac{1}{3}}$ $\quad f'(x)=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ $\quad f(x+\Delta x)\cong f(x)+f'(x)\Delta x$

$$\sqrt[3]{9}\cong\sqrt[3]{8}+\frac{1}{3\sqrt[3]{8^2}}(1)\cong 2+\frac{1}{3\times 4}(1)=2+\frac{1}{12}=\frac{25}{12}$$

قضایای مشتق:

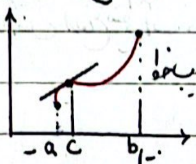
۱. قضیه رول: فرض کنید شرایط زیر برقرار باشند: الف) تابع $f(x)$ بر $[a,b]$ پیوسته باشد. ب) تابع $f(x)$ بر (a,b) مشتق پذیر باشد

شرط اصلی



ج) $f(a)=f(b)$، آن گاه: $\exists c\in(a,b): f'(c)=0$، در این بازه عددی وجود دارد که مشتق آن صفر باشد.

2. قضیه مقدار میانگین: فرض کنید شرایط زیر برقرار باشند: الف) تابع $f(x)$ بر $[a,b]$ پیوسته باشد، ب) تابع $f(x)$ بر (a,b) مشتق پذیر باشد



آن گاه: $\exists c\in(a,b): f'(c)=\frac{f(a)-f(b)}{a-b}$، در این بازه عددی وجود دارد که مشتق آن برابر با شیب خط باشد.

تعبیر هندسی قضیه مقدار میانگین: شیب خط حاصل دو نقطه ابتدا و انتهای بازه $[a,b]$ با شیب تابع در نقطه c برابر است.

نتایج از قضیه مقدار میانگین:

۱. مشتق تابع ثابت همواره برابر با صفر است.

۲. اگر مشتق دو تابع با هم برابر باشند، آن دو تابع می توانند در یک مقدار ثابت عددی با هم اختلاف داشته باشند. یعنی:

عدد ثابت

$f'(x)=g'(x)$ $\quad f(x)=g(x)+k$

3. اگر مشتق تابع به ازای تمام نقاط دامنه مثبت باشد، آن گاه تابع $f(x)$ تابعی اکیدا صعودی است. $\quad f'(x)>0,\ \forall x\in D_f$

مثال: c صادق در قضیه رول را پیدا کنید. $\quad f(x)=x^4-4x^2 \quad [0,2]$

$f(x)$ چندجمله ای است در $[0,2]$ پیوسته در $(0,2)$ مشتق پذیر است

② ①

③ $\begin{cases} f(0)=0 \\ f(2)=0 \end{cases}$ $\quad f(0)=f(2)=0$

طبق قضیه رول $\Rightarrow \exists c\in(0,2): f'(c)=0$ $\quad f'(x)=4x^3-8x=0$

$4x(x^2-2)=0 \begin{cases} x=0 & \text{غ ق ق} \\ x=\sqrt{2} & ✓ \\ x=-\sqrt{2} & \text{غ ق ق} \end{cases}$

در حل سوالات قضیه رول و مقدار میانگین همه شرط ها نوشته شود

مثال: c صدق در قضیه مقدار میانگین را پیدا کنید. $f(x)=x^3-3x+1 \quad [0,3]$

$f(x)$ چندجمله‌ای بر $[0,3]$ پیوسته و $(0,3)$ مشتق‌پذیر است

طبق قضیه مقدار میانگین: $\exists c\in(0,3): f'(c)=\frac{f(3)-f(0)}{3-0}=\frac{19-1}{3}=6$

$3c^2=9 \quad c^2=3 \begin{cases} c=\sqrt{3} \ \checkmark \\ c=-\sqrt{3} \ \text{غ ق ق} \end{cases}$

نمونه سوالات امتحانی:

* مثال: معادله $f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\dots+a_{n-1}x=0$ که در آن n عددی طبیعی و $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ اعدادی حقیقی هستند را در نظر بگیرید. اگر $x=r$ یک ریشه مثبت معادله باشد، نشان دهید معادله $\underbrace{nx^{n-1}+a_1(n-1)x^{n-2}+\dots+a_{n-1}=0}_{f'(x)\ \text{معادله}}$ حداقل یک ریشه مثبت کوچکتر از r دارد.

$r\geq 0 \quad f(r)=0$

$f(0)=0$

$f(r)=0$ طبق قضیه رول: $\exists c\in(0,r): f'(c)=0 \quad r>0$

بازه $[0,r]$ را در نظر می‌گیریم، $f(x)$ چندجمله‌ای است و بر $[0,r]$ پیوسته و بر $(0,r)$ مشتق‌پذیر است

* مثال: فرض کنید n عددی مثبت و زوج باشد، a و b اعداد حقیقی باشند، با استفاده از قضیه رول نشان دهید معادله $f(x)=x^n+ax+b=0$ نمی‌تواند بیش از دو ریشه حقیقی داشته باشد.

به فرض خلف، فرض می‌کنیم معادله دارای بیش از دو ریشه حقیقی باشد مثلا فرض می‌کنیم دارای سه ریشه باشد $x_1<x_2<x_3$ باشند. چون $f(x)$

$f(x_1)=f(x_2)=f(x_3)=0$

چندجمله‌ای است بر کل R پیوسته می‌باشد، بنابراین بر بازه $[x_1,x_2]$ و $[x_2,x_3]$ نیز پیوسته و بر (x_1,x_2) و (x_2,x_3) مشتق‌پذیر است

$f'(x)=nx^{n-1}+a \xrightarrow{f'(x)=0} x=\sqrt[n-1]{-\frac{a}{n}}$ طبق قضیه رول $\Rightarrow \exists c_1\in(x_1,x_2): f'(c_1)=0$ تابع $f'(x)=0$

حداقل دو ریشه دارد $\exists c_2\in(x_2,x_3): f'(c_2)=0$

در نتیجه ریشه مشتق منحصر به فرد است که نتیجه‌ای که از قضیه رول گرفتیم با آن در تناقض است پس فرض خلف باطل و حکم ثابت می‌شود

* مثال: ثابت کنید معادله $f(x)=x^3-3x^2+5x-2=0$ دقیقاً یک ریشه در $[0,1]$ دارد.

می‌دانیم: $f(x)$ 5 ریشه، $f'(x)$ 4 ریشه، $f''(x)$ 3 ریشه

حل: $f(x)$ چندجمله‌ای است و بر $[0,1]$ پیوسته است

$\left.\begin{matrix} f(0)=-2 \\ f(1)=1 \end{matrix}\right\} f(0)f(1)<0$

$\exists c\in[0,1]: f(c)=0$ نتیجه قضیه مقدار میانی: تابع $f(x)=0$ حداقل یک ریشه دارد

$f'(x)=3x^2-6x+5 \quad \Delta=36-60<0 \rightarrow f'(x)$ فاقد ریشه

$f'(x)$ در $[0,1]$ فاقد ریشه است پس $f(x)=0$ حداکثر یک ریشه دارد با در نظر گرفتن نتیجه قضیه مقدار میانی نتیجه می‌شود $f(x)=0$ دقیقاً یک ریشه دارد

نکته: $f'(x) = 0 \rightarrow$ قضیه رل $f'(x) =$ عدد $\rightarrow$ صد در صد قضیه مقدار میانگین

نکته: در حل نمونه سوالات این مبحث پیدا کردن بازه بسیار مهم است.

* مثال: فرض کنید f تابعی دو مرتبه مشتق پذیر باشد و $f(0) = 1$ و $f(1) = 3$ و $f(3) = 7$، نشان دهید x_1 و x_2 وجود دارند $f'(x_1) = f'(x_2) = 2$.

- تعیین بازه: 3 نقطه داریم پس 2 بازه می توانیم بنویسیم

حل: f تابعی پیوسته و مشتق پذیر است (طبق فرض مسئله) بنابراین:

قضیه مقدار میانگین: $\exists x_1 \in (0,1) : f'(x_1) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = \frac{3 - 1}{1} = 2$

$\exists x_2 \in (1,3) : f'(x_2) = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{7 - 3}{2} = 2$

نقاط اکسترمم:

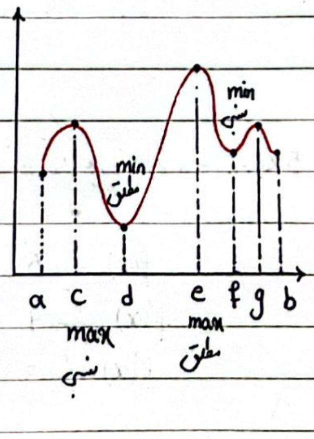
الف) نقطه $x = c$ را مینیمم - ماکزیمم نسبی تابع $f(x)$ گوییم هرگاه این نقطه نسبت به نقاطی که در همسایگی آن قرار دارند، در پایین ترین - بالاترین جایگاه قرار گرفته باشند $\forall x \in (c - \delta, c + \delta) : f(c) \leq f(x)$ ($N(c)$: مرکز همسایگی و δ: شعاع همسایگی)

در همسایگی $\geq$

اکسترمم نسبی = موضعی یا محلی = local

ب) نقطه c، x را مینیمم - ماکزیمم مطلق تابع $f(x)$ گوییم هرگاه $f(c) \leq f(x)$: $\forall x \in D_f$.

در کل دامنه $\geq$



نقاط بحرانی: نقطه $x=c$ را نقطه بحرانی تابع $f(x)$ گوییم هرگاه $f'(c)=0$ یا $f'(c)$ موجود نباشد.

مثال: نقاط بحرانی توابع زیر را پیدا کنید.

A) $y=\cos^2 x-\sin^2 x+1$ $\qquad y'=-2\sin x\cos x-2\sin x\cos x=-4\sin x\cos x=-2\sin 2x$

$y'=0 \to -2\sin 2x=0 \qquad 2x=k\pi \qquad x=\frac{k\pi}{2} \qquad k\in\mathbb{Z}$

یادآوری: $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

B) $y=3x^5-5x^3$ $\qquad y'=15x^4-15x^2=15x^2(x^2-1)=0$ $\begin{cases} x=1\\ x=0\\ x=-1\end{cases}$

	-1		0		1	
+	0	−	0	−	0	+
↗ صعودی		↘		↘ نزولی		↗ صعودی

تعیین بازه‌های صعودی و نزولی:

برای مشخص بازه‌های صعودی و نزولی نخست لازم است ریشه‌های مشتق را محاسبه کرده و جدول تعیین علامت y' را رسم نماییم بازه‌هایی که در آن $y'>0$ است، تابع اکیداً صعودی و بازه‌هایی که در آن $y'<0$ است، تابع اکیداً نزولی است. چنانچه $y'=0$ باشد گوییم تابع ثابت است

مثال: بازه‌های صعودی و نزولی (بازه‌های یکنوایی) را برای تابع زیر مشخص کنید. بخش B مثال قبلی

* مثال: نشان دهید تابع $f(x)=x^5+x^3+x+1$ دقیقاً یک ریشه دارد.

بازه $[-1,1]$ را در نظر می‌گیریم $f(x)$ چندجمله‌ای است پس در بازه در نظر گرفته شده پیوسته است و $f(-1)f(1)<0$ طبق نتیجه قضیه مقدار میانی $\exists c\in[-1,1]: f(c)=0$

به دلیل اینکه $y=0$ داخل بازه

(وجود حداقل یک ریشه برای تابع $f(x)$) همچنین f' بر بازه $[-1,1]$ صعودی است پس فقط در یک نقطه $x=c$ نمودار تابع محور x ها را قطع می‌کند

تعیین نوع نقاط اکسترمم نسبی:

برای تعیین نوع نقاط اکسترمم نسبی می‌توان از دو آزمون زیر استفاده کرد.

1. آزمون مشتق اول:

		a_1		a_2		a_3 (آزمون جواب نمی‌دهد)	
y'	+	0	−	0	+	0	+
	↗		↘		↗		↗
		Max نسبی		Min نسبی			

2. آزمون مشتق دوم:

$y''(\text{نقاط بحرانی})>0 \to$ نقطه Min کننده $\qquad y''(\text{نقاط بحرانی})<0 \to$ نقطه Max کننده

$y''(\text{نقاط بحرانی})=0 \to$ آزمون جواب نمی‌دهد

مثال: نوع نقاط اکسترمم نسبی تابع زیر را مشخص کنید. $y = x^4 - 2x^2$

$$y' = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1) = 0 \begin{cases} x = 0 & \text{Max نسبی} \\ x = 1 & \text{Min نسبی} \\ x = -1 & \text{Min نسبی} \end{cases}$$

آزمون مشتق اول:

x		-1		0		1	
y'	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
	↘		↗		↘		↗

آزمون مشتق دوم: $y'' = 12x^2 - 4$

$y''(-1) = 8 > 0$ Min نسبی

$y''(1) = 8 > 0$ Min نسبی

$y''(0) = -4 < 0$ Max نسبی

اکسترمم مطلق:

برای یافتن نقاط اکسترمم مطلق تابع $f(x)$ در $[a, b]$ نخست لازم است ریشه‌های مشتق را پیدا کنیم سپس مقدار تابع $f(x)$ را در ریشه‌های مشتق و نیز در دو نقطه ابتدا و انتهای بازه پیدا می‌کنیم نقطه متناظر با بیشترین مقدار تابع Max مطلق و نقطه متناظر با کمترین مقدار تابع Min مطلق خواهد بود (اکسترمم‌های مطلق لزوماً منحصر به فرد نمی‌باشند).

* مثال: نقاط اکسترمم مطلق تابع زیر را بیابید. $f(x) = 8x - x^4 \quad [-2, 1]$

$f'(x) = 8 - 4x^3 = 0 \quad 4x^3 = 8 \quad x = \sqrt[3]{2} \notin [-2, 1]$ غیرقابل قبول

$f(-2) = -32$ Min مطلق $\quad f(1) = 7$ Max مطلق

تعیین تقعر تابع و تشخیص نقاط عطف:

برای یافتن جهت تقعر تابع لازم است مشتق دوم را ریشه یابی کرده و جدول تعیین علامت را برای مشتق دوم رسم کنیم. بازه‌هایی که در آن مشتق دوم مثبت است جهت تقعر رو به بالا و بازه‌هایی که در آن مشتق دوم منفی است جهت تقعر رو به پایین می‌باشند. نقطه $x = c$ را نقطه عطف تابع $f(x)$ گوییم هرگاه در آن نقطه تغییر تقعر داشته باشیم و نیز مماس وجود داشته باشد.

مثال: جهت تقعر و نقاط عطف تابع زیر را پیدا کنید. $f(x) = 4x^4 - 4x^3$

$f'(x) = 16x^3 - 12x^2 \quad f''(x) = 48x^2 - 24x = 0 \quad 24x(2x - 1) = 0 \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = 0 \end{cases}$

x		0		$\frac{1}{2}$	
f'	$-$	0	$-$	0	$+$
f''	$+$ $\cup$		$-$ $\cap$		$+$ $\cup$

رسم نمودار تابع :

مراحل رسم نمودار تابع به شرح زیر می باشد :

1. تعیین دامنه تابع　　2. یافتن مجانب های تابع　　3. مشخص بازه های صعودی و نزولی

4. یافتن نقاط اکسترمم نقاط عطف و جهت های تقعر تابع　　5. یافتن محل برخورد تابع با محورها درصورت وجود

مثال: نمودار تابع زیر را رسم کنید.

$$f(x) = \frac{x+1}{2x+1}$$

1. $D_f = R - \{-\frac{1}{2}\}$

2. مجانب قائم : $x = -\frac{1}{2}$　　مجانب افقی : $\lim_{x \to \infty} f(x) = \frac{1}{2}$　$y = \frac{1}{2}$　　مجانب مایل : $a = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ $\times$ ندارد

3. $f'(x) = \frac{(2x+1) - 2(x+1)}{(2x+1)^2} = \frac{-1}{(2x+1)^2} < 0$　تابع اکیداً نزولی　　$x = -\frac{1}{2}$ نقطه ای که در آن مشتق نداریم

4. $f''(x) = \frac{4(2x+1)}{(2x+1)^4} = \frac{4}{(2x+1)^3}$

	$-\frac{1}{2}$
f'	$\searrow$ ∘ $\searrow$
f''	$\ominus$ ∘ $\oplus$

x	y
0	1
-1	0

قاعده هوپیتال :

اگر پس از محاسبه حد به یکی از دو حالت مبهم $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ برسیم برای رفع ابهام می توان از قاعده هوپیتال استفاده کرد. در قاعده هوپیتال لازم است تا زمانی که از حالت مبهم خارج نشده ایم از صورت و مخرج کسر به صورت جداگانه مشتق بگیریم و حاصل حد را محاسبه کنیم.

مثال: حاصل حد زیر را محاسبه کنید.

$$\lim_{x \to 0} \frac{3x^2+5x}{8x^2+3x} = \frac{0}{0} \text{ مبهم } \xrightarrow{Hop} \lim_{x \to 0} \frac{6x+5}{16x+3} = \frac{5}{3}$$

بهینه سازی :

یکی از کاربردهای مهم مشتق بحث بهینه سازی است برای این منظور لازم است بسته به اطلاعات داده شده تابع هدف را معرفی کنیم اگر تابع هدف بیش از یک متغیر داشته باشد با استفاده از فرضیات مسئله متغیرها را براساس هم می نویسیم و تابع را به صورت یک تابع یک متغیره بازنویسی می کنیم پس نقاط مینیمم کننده یا ماکزیمم کننده را براساس خواسته مسئله محاسبه می کنیم.

مثال: مجموع دو عدد مثبت 12 است ماکزیمم حاصل ضرب آن دو را بیابید.

$x+y=12 \qquad y=12-x \qquad f(x,y)=xy=x(12-x)=12x-x^2=f(x)$

$f'(x)=12-2x=0 \qquad x=6 \qquad y=6 \qquad f''(x)=-2<0$ ماکزیمم شده $\qquad f(6,6)=36$

مثال: کمترین فاصله مبدا مختصات را از نقاط منحنی $y^2=4x+9$ را بیابید.

$\begin{vmatrix}0\\0\end{vmatrix} \begin{vmatrix}x\\y\end{vmatrix} \qquad d=\sqrt{x^2+y^2}=f(x,y)$

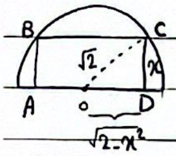
$\sqrt{x^2+4x+9}=f(x) \qquad f'(x)=\dfrac{2x+4}{2\sqrt{x^2+4x+9}}=\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+9}}=0 \qquad x=-2$

$f''(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+4x+9}-(x+2)\left(\frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+9}}\right)}{x^2+4x+9}>0$ مینیمم شده

$x=-2\ ,\ y=1 \qquad f(-2,1)=\sqrt{5}$

$x=-2\ ,\ y=-1 \qquad f(-2,-1)=\sqrt{5}$

* مثال: اگر مطابق شکل مستطیل را درنیم دایره‌ای به شعاع $\sqrt{2}$ محاط کنیم مطلوب است ماکزیمم مقدار محیط مستطیل:



محیط مستطیل $=2(2OD+CD) \qquad OD=\sqrt{2-x^2} \qquad 2-x^2\geq 0 \rightarrow \cancel{-\sqrt{2}}\ 0\leq x\leq\sqrt{2}$

ماکزیمم شده

$f(x)=4\sqrt{2-x^2}+2x \qquad f'(x)=4\times\dfrac{-\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{2-x^2}}+2=\dfrac{-4x}{\sqrt{2-x^2}}+2=0 \qquad f''(x)=\dfrac{-4\sqrt{2-x^2}+4x\times\frac{-2x}{2\sqrt{2-x^2}}}{2-x^2}<0$

$f\left(\sqrt{\frac{2}{5}}\right)=\dfrac{10\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$

$x=\sqrt{\frac{2}{5}}\ ,\ -\sqrt{\frac{2}{5}}\notin D_f$

$f(0)=4\sqrt{2} \qquad f(\sqrt{2})=2\sqrt{2}$

پادمشتق :

فرض کنید $f(x)$ تابعی پیوسته باشد آن گاه $F(x)$ را پادمشتق آن می‌نامیم هرگاه $F'(x) = f(x)$ مجموعه تمام پادمشتق‌های $f(x)$ را به صورت $F(x)+C$ نشان می‌دهیم که در آن C عددی ثابت است به عبارت دیگر می‌توان مفهوم پادمشتق را به صورت زیر نوشت :

انتگرال   دیفرانسیل

$$\int f(x)\, d(x) = F(x) + C$$

C را فراموش نکن

تابع تحت انتگرال   پادمشتق   عدد ثابت

نکته:

تابع اصلی	پادمشتق	
$f(x) \pm g(x)$	$F(x) \pm G(x)$	
$kf(x)$	$kF(x)$	$k \in \mathbb{Z}$

نکته: پادمشتق خاصیت خطی دارد.

$$\sum_{i=1}^{n} \int a_i f_i(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} a_i \int f_i(x)\,dx$$

فرمول‌های انتگرال گیری :

1) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

2) $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$

3) $\int \cos x\, dx = \sin x + C$

4) $\int e^x dx = e^x + C$

5) $\int \sec^2 x\, dx = tg\, x + C$

6) $\boxed{\int \csc^2 x\, dx = -\cot g\, x + C}$

مثال:

1. $\int x^3\, dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} + C = \frac{x^4}{4} + C$

2. $\int (2x + \sin x)dx = 2\int x dx + \int \sin x\, dx = 2(\frac{x^2}{2}) + (-\cos x) + C = x^2 - \cos x + C$

3. $\int (\cos x + e^x + 1)dx = \int \cos x\, dx + \int e^x dx + \int 1 dx = \sin x + e^x + x + C$

انتگرال معین :

یادآوری :

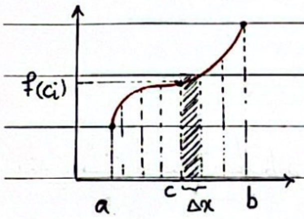
$$\sum_{i=1}^{n} a_i \pm b_i = \sum_{i=1}^{n} a_i \pm \sum_{i=1}^{n} b_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} c a_i = c \sum_{i=1}^{n} a_i \qquad \sum_{i=1}^{n} c = c \sum_{i=1}^{n} 1 = cn$$

شکل زیر را در نظر بگیرید و فرض کنید می‌خواهیم مساحت زیر منحنی را تا محور x ها محاسبه کنیم از آنجا که این قسمت دارای شکل شناخته شده ای نمی باشد برای محاسبه مساحت یک پیشنهاد آن است که این ناحیه را به مستطیل های افراز کنیم و سپس با استفاده از فرمول محاسبه مساحت مستطیل مساحت آن ناحیه را محاسبه نماییم با فرض اینکه عرض همه مستطیل ها با هم برابر باشد داریم: $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. همچنین برای محاسبه مساحت مستطیلی که در شکل مشخص شده است داریم $\overset{\text{طول}}{f(c_i)}\ \overset{\text{عرض}}{\Delta x}$ از آنجا که c_i نقطه دلخواهی است مجموع مساحت مستطیل ها به صورت زیر محاسبه می شود:

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x$$

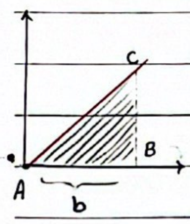
حال با فرض اینکه عرض مستطیل ها به اندازه کافی کوچک باشد یعنی $\Delta x \to 0$ داریم مساحت زیر منحنی برابر است با $\int_a^b f(x)dx$



این نماد معرف مفهوم انتگرال معین است زیرا بازه انتگرال گیری در آن مشخص شده است.

نکته: حاصل انتگرال معین یک عدد است و منحصر به فرد می باشد یکی از کاربردهای مهم انتگرال معین محاسبه مساحت زیر منحنی است فرض کنید $f(x)$ بر $[a, b]$ انتگرال پذیر باشد آنگاه مساحت زیر این منحنی در بازه $[a, b]$ برابر است با $\int_a^b f(x)\,dx$

مثال: مساحت زیر منحنی $y=x$ را در $[0, b]$ پیدا کنید.



$$S_{\text{مثلث}} = \frac{1}{2}(AB)(BC) = \frac{b^2}{2}$$

$$\int_0^b f(x)\,dx = \int_0^b x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big]_0^b = \frac{b^2}{2} - 0 = \frac{b^2}{2}$$

خواص انتگرال معین:

1. خاصیت خطی: $\int_a^b (\lambda f(x) + g(x))dx = \lambda\int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \qquad \lambda \in \mathbb{R}$

2. خاصیت جمع پذیری: $\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$

3. خاصیت تغییر کران: $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

4. $\forall x \in [a,b] : f(x) \leqslant g(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b g(x)dx$

$\forall x\in[a,b]: m \le f(x) \le M \rightarrow m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$ .5

6. اگر f روی $[a,b]$ انتگرال پذیر باشد آنگاه $\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$: مقدار متوسط تابع (قضیه مقدار میانگین برای انتگرال ها)

فرض کنید تابع $f(x)$ در بازه $[a,b]$ پیوسته باشد آنگاه داریم: $\exists c\in(a,b): f(c)=\frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$

مثال: مطلوب است محاسبه مقدار متوسط $f(x)=\cos^2 x$ در $[0,\frac{\pi}{2}]$ با فرض آنکه $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\, dx=\frac{\pi}{4}$.

$$\text{مقدار متوسط} = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\, dx}{\frac{\pi}{2}-0} = \frac{\frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}$$

7. بازه متقارن:

$$\int_{-a}^{a} f(x) \begin{cases} \text{زوج } f(x): & 2\int_0^a f(x)dx \\ \text{فرد } f(x): & \int_{-a}^{a} f(x)dx = 0 \end{cases}$$

مثال:

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(\frac{1-\sqrt{x}}{2}\right)dx = 0$$

8. $\int_a^a f(x)dx = 0$

نکته: $f(-x)=f(x)$ تابع زوج مانند $\cos$ — $f(-x)=-f(x)$ تابع فرد مانند $\sin$

قضیه اساسی اول حساب دیفرانسیل و انتگرال:

اگر $f(x)$ در بازه $[a,b]$ پیوسته باشد آنگاه $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ تابع اولیه $f(x)$ خواهد بود یعنی: $F'(x)=\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = 1\times f(x)-0$

نتیجه قضیه برحالت کلی:

$$\left(\int_{u(t)}^{v(t)} f(t)dt\right)' = \underbrace{v'(x).f(v(x))}_{\text{مشتق بالایی × مقدار بالایی}} - \underbrace{u'(x).f(u(x))}_{\text{مشتق پایینی × مقدار پایینی}}$$

مثال: مشتق عبارات زیر را محاسبه کنید.

A) $\int_{3x}^{4x^2+3} \sqrt{\cos t}\, dt \xrightarrow{'} 8x \times \sqrt{\cos(4x^2+3)} - 3\sqrt{\cos 3x}$

B) $\int_x^5 3t\sin t\, dt \xrightarrow{'} 0 - 3x\sin x = -3x\sin x$

مثال: اگر $f(x)=\int_0^x \frac{2+e^{-t}}{1+tg^2 t}dt$ مطلوب است $(f^{-1})'(0)$. $y=0 \quad x=0$

نکته: $\int_0^0 k(x)dx = 0$

$$(f^{-1})'(0) = \frac{1}{\frac{2+e^{-x}}{1+tg^2 x}} = \frac{1}{\frac{2+1}{1}} = \frac{1}{3}$$

مثال: نقاط اکسترمم نسبی $g(x)=\int_0^{2x^2-x^4}\sqrt{t^2+1}\,dt$ را بیابید.

$$g'(x)=(4x-4x^3)\big(\underbrace{\sqrt{(2x^2-x^4)^2+1}}_{>0}\big)=0 \qquad g'=0 \quad 4x(1-x^2)=0 \begin{cases} x=0 \\ x=1 \\ x=-1 \end{cases}$$

	-1		0		1	
$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
↗		↘		↗		↘

مثال: مشتق عبارات زیر را محاسبه کنید.

$$A)\ \lim_{x\to 2}\frac{\int_2^x \frac{t+1}{t^3+5}\,dt}{x-\sqrt{2x}}=\frac{0}{0}\xrightarrow{HoP}\lim_{x\to 2}\frac{\frac{x+2}{x^3+5}}{1-\frac{2}{2\sqrt{2x}}}=\frac{\frac{3}{13}}{\frac{1}{2}}=\frac{6}{13}$$

$$B)\ \lim_{x\to 0}\frac{1}{2x^2}\int_0^x \frac{\sin^2 t}{t}\,dt=\frac{0}{0}\xrightarrow{HoP}\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \frac{\sin^2 t}{t}\,dt}{2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin^2 x}{x}}{4x}=\frac{1}{4}\,\frac{\sin^2 x}{x^2}=\frac{1}{4}$$

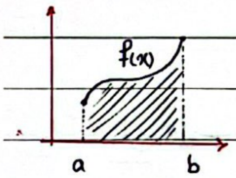
$$C)\ \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^3}\frac{\sin 6t^2}{t}\,dt}{x^6}=\frac{0}{0}\xrightarrow{HoP}\lim_{x\to 0}\frac{3x^2\,\frac{\sin 6x^6}{x^3}}{6x^5}=\frac{3x^2\,\sin 6x^6}{6x^6\times x^2}=3$$

قضیه اساسی دوم حساب دیفرانسیل و انتگرال:

فرض کنید تابع $f(x)$ بر بازه $[a,b]$ پیوسته باشد و $F(x)$ تابع اولیه مشتق‌پذیر آن باشد آنگاه: $\int_a^b f(x)\,dx=F(x)\Big]_a^b=F(b)-F(a)$

کاربردهای انتگرال معین:

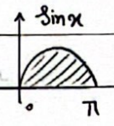
۱- محاسبه مساحت محصور بین منحنی‌ها: الف) برای محاسبه مساحت محصور بین منحنی $y=f(x)$ و محور x ها داریم:

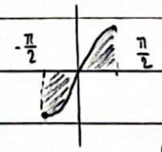


$$S=\int_a^b |f(x)|\,dx$$

مثال: مساحت محصور بین $f(x)$ و محور x ها را در بازه‌های داده شده بیابید.

$y=\sin x$ $\quad [0,\pi]$ $\quad [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$



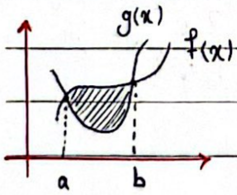


$$\int_0^\pi |\sin x|\,dx=\int_0^\pi \sin x\,dx=-\cos x\Big]_0^\pi=2$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|\sin x|\,dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 -\sin x\,dx+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx$$

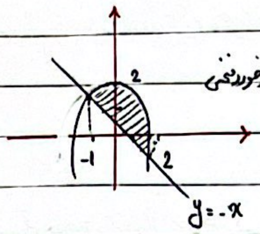
$$=\cos\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^0+-\cos\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=1-(-1)=2$$

ب) برای محاسبه مساحت محصور بین دو منحنی $f(x)$ و $g(x)$ داریم:



$$S=\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx$$

مثال: مساحت ناحیه محصور به منحنی $y=2-x^2$ و خط $y=-x$؟

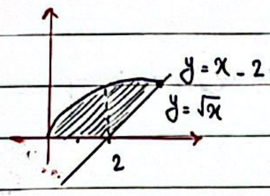


یافتن نقاط برخورد منحنی: $2-x^2=-x$

$x^2-x-2=0 \begin{cases} x=-1 \\ x=2 \end{cases}$

$$\int_{-1}^{2} |(2-x^2)-(-x)|\,dx=\int_{-1}^{2}(2-x^2+x)\,dx$$
$$=2\int_{-1}^{2}dx-\int_{-1}^{2}x^2dx+\int_{-1}^{2}x\,dx$$
$$=2x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}\Big]_{-1}^{2}=(4-\frac{8}{3}+2)-(-2+\frac{1}{3}+\frac{1}{2})=\dots$$

مثال: مساحت ناحیه ای که در ربع اول از بالا به منحنی $y=\sqrt{x}$ و از پایین به محور x و خط $y=x-2$ محدود باشد.

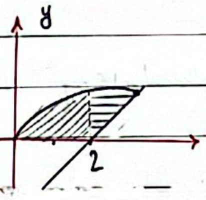


$x=y+2$

$y^2=y+2 \quad y^2-y-2=0 \begin{cases} y=-1 & \text{غ ق ق} \\ y=2 \end{cases}$

$$\int_{0}^{2}|y^2-(y+2)|\,dy=\int_{0}^{2}(y+2-y^2)\,dy$$
$$=\frac{y^2}{2}+2y-\frac{y^3}{3}\Big]_{0}^{2}=2+4-\frac{8}{3}-0$$

مثال: مساحت ناحیه ای در ربع اول که از بالا به خم $y=\sqrt{x}$ و از پایین به محور xها و خط $y=x-2$ محدود است؟



$\sqrt{x}=x-2$

$x=x^2-4x+4$

$x^2-5x+4=(x-1)(x-4)=0 \begin{cases} x=1 \\ x=4 \end{cases}$

$$\int_{0}^{2}(\sqrt{x}-0)\,dx+\int_{2}^{4}(\sqrt{x}-(x-2))\,dx$$
$$=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big]_{0}^{2}+\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}x^2\right)\Big]_{2}^{4}$$
$$=\frac{2}{3}\times 2\sqrt{2}+\left(\frac{2}{3}4\sqrt{4}-8+8\right)-\left(\frac{2}{3}2\sqrt{2}-2+4\right)$$
$$=\frac{10}{3}$$

حجم جسم دوار:

فرض کنید می خواهیم حجم جسمی را محاسبه کنیم که مساحت قاعده آن با تابع $A(x)$ تعریف شده است برای محاسبه حجم این جسم در بازه $[a,b]$ داریم

$$V=\int_{a}^{b}A(x)\,dx$$

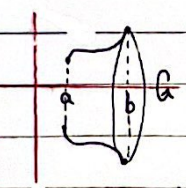
مثال: هرمی به ارتفاع 3 متر و قاعده مربعی شکل به ضلع 3 متر مفروض است سطح مقطع این شکل به فاصله x متر از رأس هرم و عمود بر محور هرم مربعی است به ضلع x متر مطلوب است محاسبه حجم این جسم.

$$\int_{0}^{3}x^2dx=\frac{x^3}{3}\Big]_{0}^{3}=9$$

روش های محاسبه حجم:

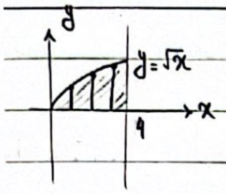
۱- روش قرص (دیسکی): اگر $f(x)$ بر $[a,b]$ انتگرال پذیر باشد برای محاسبه حجم جسم حاصل از دوران $f(x)$ در بازه $[a,b]$ حول خط $y=c$ داریم:

$$V=\int_{a}^{b}\pi\,(\text{شعاع قرص})^2\,dx$$



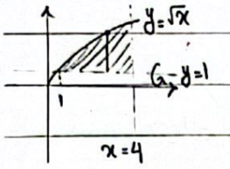
اگر بین ناحیه محصور و خطی که حول آن دوران می دهیم فرجه وجود داشته باشد (فضای خالی نباشد) از روش قرص یا دیسکی استفاده می کنیم.

$y=0$ اشتراک با x



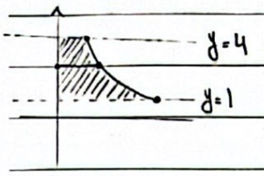
مثال: حجم حاصل از دوران ناحیه محصور به $y=\sqrt{x}$ ، $0 \le x \le 4$ و محور x را حول محور x ها بیابید.

$$\int_0^4 \pi(\sqrt{x}-0)^2\,dx = \int_0^4 \pi x\,dx = \frac{\pi}{2}x^2\Big]_0^4 = 8\pi$$



مثال: حجم حاصل از دوران ناحیه محصور به $y=\sqrt{x}$ و $x=4$ و $y=1$ و حول خط $y=1$ را بیابید.

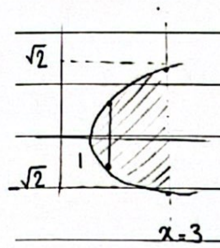
$$\int_1^4 \pi(\sqrt{x}-1)^2\,dx = \int_1^4 \pi(x-2\sqrt{x}+1)\,dx = \pi\left(\frac{x^2}{2}-2\times\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+x\right)\Big]_1^4$$



مثال: حجم حاصل از دوران ناحیه محصور به محور y ها و منحنی $x=\frac{2}{y}$ ، $1 \le y \le 4$ را حول محور y ها بیابید.

$x=0 \rightarrow$ y اشتراک با

$$\int_1^4 \pi\left(\frac{2}{y}-0\right)^2 dy = \int_1^4 \pi\times\frac{4}{y^2}\,dy = 4\pi\int_1^4 y^{-2}\,dy = 4\pi\left(\frac{y^{-1}}{-1}\right)\Big]_1^4 = 3\pi$$



مثال: حجم حاصل از دوران ناحیه محصور به منحنی $x=y^2+1$ و خط $x=3$ را حول خط $x=3$ بیابید.

$$\int_{-\sqrt2}^{\sqrt2} \pi(3-(y^2+1))^2\,dy = \int_{-\sqrt2}^{\sqrt2} \pi(2-y^2)^2\,dy = \int_{-\sqrt2}^{\sqrt2} \pi(4+y^4-4y^2)\,dy = \pi\left(4y+\frac{y^5}{5}-\frac{4}{3}y^3\right)\Big]_{-\sqrt2}^{\sqrt2}$$

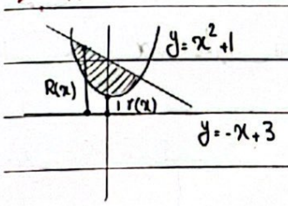
$$=\pi\left[\left(4\sqrt2+\frac{\sqrt2^5}{5}-\frac43(\sqrt2)^3\right)-\left(-4\sqrt2+\frac{(-\sqrt2)^5}{5}-\frac43(-\sqrt2)^3\right)\right]$$

2. روش واشری:

اگر تابع $f(x)$ بر بازه $[a,b]$ انتگرال پذیر باشد و ناحیه ای که حول خط $y=c$ دوران می دهیم محور دوران را قطع نکند یا آن را در مرز نداشته باشد در شکل حاصل حفره ای ایجاد می شود که لازم است در محاسبه حجم آن را لحاظ کنیم، داریم:

$$V=\int_a^b \pi\left(R^2(x)-r^2(x)\right)dx$$

$R(x)$: شعاع بیرونی = دورترین نقاط نسبت به محور دوران $r(x)$: شعاع درونی = نزدیک ترین نقاط به محور دوران



مثال: ناحیه محصور به منحنی $y=x^2+1$ و خط $y=-x+3$ را حول محور x ها دوران می دهیم. حجم جسم حاصل؟

$y=0$

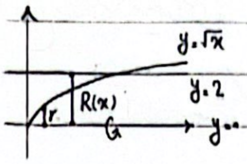
نقاط برخورد: $x^2+1=-x+3$ $x^2+x-2=0$ $\begin{cases} x=1 \\ x=-2 \end{cases}$

$$V=\int_{-2}^1 \pi\left((-x+3)^2-(x^2+1)^2\right)dx = \pi\left(\left(\frac{x^3}{3}-\frac{6}{2}x^2+9x\right)-\left(\frac{x^5}{5}+\frac{2}{3}x^3+x\right)\right)\Big]_{-2}^1 \rightarrow$$ جایگذاری کنید.

$R(x)=-x+3-0$ $r(x)=x^2+1-0$

بیرونی   درونی

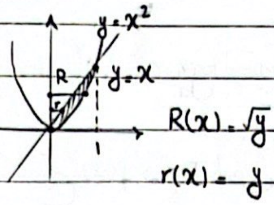
مثال: ناحیه محدود به نمودار $y=\sqrt{x}$، خطوط $y=2$ و $x=0$ را حول محور x ها دوران می‌دهیم. حجم حاصل؟



$$\int_0^4 \pi(2^2-(\sqrt{x})^2)\,dx = \int_0^4 \pi(4-x)\,dx = \pi\left(4x-\frac{x^2}{2}\right)\Big]_0^4 = \pi(16-8)=8\pi$$

$R(x)=2 \qquad r(x)=\sqrt{x}$

مثال: ناحیه محدود به منحنی $y=x^2$ و خط $y=x$ را در ربع اول حول محور y ها دوران می‌دهیم. حجم جسم حاصل؟



$x=0$ انتگرال برابر است با

$R(x)=\sqrt{y}$

$r(x)=y$

$$\int_0^1 \pi((\sqrt{y})^2-y^2)\,dy = \int_0^1 \pi(y-y^2)\,dy = \pi\left(\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{3}\right)\Big]_0^1 =$$ جایگذاری شود

$$x^2=x \qquad x^2-x=x(x-1)=0 \quad \begin{cases} x=1 \\ x=0 \end{cases}$$

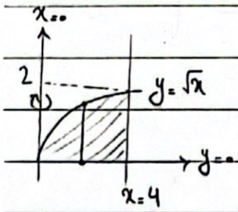
3- روش پوسته استوانه‌ای:

اگر تابع $f(x)$ بر بازه $[a,b]$ انتگرال‌پذیر باشد برای محاسبه حجم حاصل از دوران حول خط $x=c$ با استفاده از روش پوسته استوانه‌ای از رابطه زیر استفاده می‌کنیم.

$$V=\int_a^b 2\pi(\text{شعاع پوسته})(\text{ارتفاع پوسته})\,dx \qquad \int \quad dx \leftarrow x=c$$

برای یافتن ارتفاع پوسته باید خطی موازی محور دوران در ناحیه محصور رسم کنیم طول این خط برابر ارتفاع پوسته است.

مثال: ناحیه محصور به نمودار $y=\sqrt{x}$، محور x ها و خط $x=4$ را حول محور y ها دوران می‌دهیم، حجم جسم حاصل؟

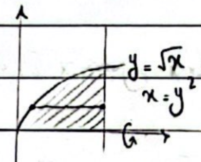


$$V=\int_0^4 2\pi(\sqrt{x})(x)\,dx = 2\pi\int_0^4 x^{\frac{3}{2}}\,dx = 2\pi\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} = 2\pi\cdot\frac{2}{5}\cdot 4^{\frac{5}{2}}$$

ارتفاع پوسته: $\sqrt{x}$

شعاع پوسته: x

مثال: اگر در مثال قبل دوران حول محور x ها باشد، پاسخ را بیابید.

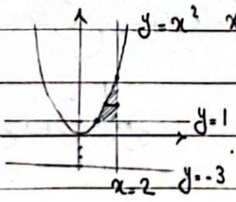


ارتفاع $=4-y^2$

شعاع $=y-0$

$$V=\int_0^2 2\pi(4-y^2)(y)\,dy = \int_0^2 2\pi(4y-y^3)\,dy = 2\pi\left(\frac{4}{2}y^2-\frac{y^4}{4}\right)\Big]_0^2$$

مثال: ناحیه محدود به منحنی $y=x^2$ و خطوط $y=1$ و $x=2$ را حول خط $y=-3$ دوران می‌دهیم، حجم را به روش پوسته استوانه‌ای محاسبه کنید.



$V=$

توابع متعالی (غیرجبری):

اعداد غیرجبری اعدادی هستند که ریشه های معادلات چندجمله ای با ضرایب گویا نیستند. مانند: اعداد e و π

توابعی که براساس اعداد غیرجبری تعریف می شوند و یا توابعی که نتوان آنها را به صورت یک چندجمله ای تعریف کرد توابع غیرجبری می باشند مانند:

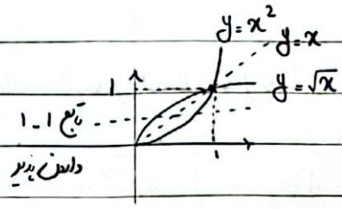
توابع $\ln x$ ، e^x ، a^x ، $\log_a x$ ، توابع وارون مثلثاتی و توابع هذلولوی (هایپربولیک)

یادآوری: تابع $f(x)$ در D_f وارون پذیر است هرگاه تابعی یک به یک باشد می دانیم تابع $f(x)$ یک به یک است اگر $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

از نظر هندسی هر تابع با وارون خودش نسبت به نیمساز ربع اول و سوم قرینه است.

مثال: وارون تابع زیر را محاسبه کنید. $y = x^2 \quad , \quad x > 0$

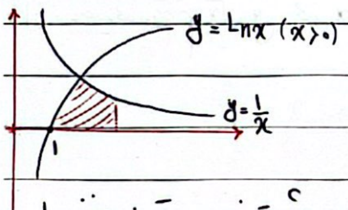
$\sqrt{y} = |x| \xrightarrow{x>0} \sqrt{y} = x \qquad f^{-1}(x) = \sqrt{x}$



لگاریتم طبیعی ($\ln x$):

$y = \ln x \quad x > 0$ را لگاریتم طبیعی می گوییم می توان این تابع را به صورت $\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t}$ تعریف کرد از نظر هندسی شکل ln به صورت زیر است:

$\log_{10}^{9}$ را لگاریتم طبیعی نمی گوییم



$D_{\ln x} = (0, \infty)$

$R_{\ln x} = (-\infty, +\infty)$

اگر $x > 1$ مساحت زیر منحنی $y = \frac{1}{x}$ در بازهٔ ۱ تا x حاصل $\ln x$ را نشان می دهد اما اگر x بین ۰ و ۱ باشد قرینه مساحت زیر منحنی $\frac{1}{x}$ در بازهٔ ۱ تا x حاصل $\ln x$ را نشان می دهد.

نکته: در رسم منحنی $y = \ln x$ توجه داریم که چون $\underbrace{y' = \frac{1}{x}}_{\text{مشتق اول}} \ (x > 0)$ همواره مثبت است این تابع صعودی می باشد و از آنجا که $\underbrace{y'' = \frac{-1}{x^2}}_{\text{مشتق دوم}}$ کوچکتر از صفر است تقعر تابع رو به پایین است.

مشتق لگاریتم طبیعی: $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

مثال:

1. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

2. $(\ln \sin x)' = \frac{\cos x}{\sin x} = \cot g\, x$

3. $(\ln 3x^2)' = \frac{6x}{3x^2} = \frac{2}{x}$

مثال: $\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \ln|x^2+1| + c$ ← نکته: $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + c$

نکاتی درمورد لگاریتم طبیعی: $1.\ \ln(ax) = \ln a + \ln x$ $\quad 2.\ \ln\left(\frac{a}{x}\right) = \ln a - \ln x$

$3.\ \ln\left(\frac{1}{x}\right) = \cancel{\ln 1} - \ln x = -\ln x$ $\quad 4.\ \ln x^{n} = n \ln x$

نکته: می‌توان از خواص $\ln x$ برای ساده‌سازی در محاسبه مشتق توابعی که به صورت کسری شکل از عبارت‌های توان‌دار است استفاده کرد.

مثال: مشتق تابع را حساب کنید.

$$f(x) = \frac{(x+1)^3 (2x-1)^{\frac{1}{2}}}{(x+5)^4} \xrightarrow{\ln \text{ می‌گیریم}} \ln f(x) = \ln(x+1)^3 + \ln(2x-1)^{\frac{1}{2}} - \ln(x+5)^4$$

$$\ln f(x) = 3\ln(x+1) + \frac{1}{2}\ln(2x-1) - 4\ln(x+5)$$

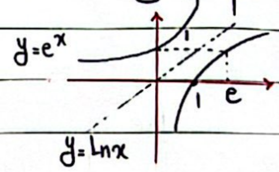
* مشتق: $\frac{f'(x)}{f(x)}$

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \left(3 \times \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{2x-1} - 4 \times \frac{1}{x+5}\right) \quad f'(x) = f(x) \times \text{پرانتز}$$

تابع $y = e^x$ (exp):

از گسترش تابع لگاریتم طبیعی تابع e^x را تولید می‌کنیم به این ترتیب که $(\ln x)^{-1} = e^x$ بنابراین می‌توان نتیجه گرفت:

$① \ \ln(e^x) = x\overbrace{(\ln e)}^{1} = x$ $\quad ② \ e^{\ln x} = x$



نکاتی درمورد $y = e^x$:

$1.\ e^{x_1} \cdot e^{x_2} = e^{x_1 + x_2}$ $\quad 2.\ \frac{e^{x_1}}{e^{x_2}} = e^{x_1 - x_2}$

$3.\ (e^{x_1})^{x_2} = e^{x_1 \cdot x_2} = e^{x_2 \cdot x_1}$ $\quad 4.\ e^{-x} = \frac{1}{e^x}$

نکته: $\int e^u\,du = e^u + c$ ، $(e^u)' = u'e^u$ → مثال:

$(e^{3x})' = 3e^{3x}$

$(e^{\sin x^2})' = \underbrace{(2x\cos x^2)}_{u'} e^{\sin x^2}$

تابع نمایی با پایه‌های مختلف e^x:

$a^x = e^{\ln a^x} \quad a > 0$

براساس خواص توابع e^x و $\ln x$ می‌توان نوشت: $a^x = e^{\ln a^x}$:

$a^x = e^{x\ln a} \xrightarrow{\text{مشتق}} (a^x)' = (e^{x\ln a})' = \ln a\, e^{x\ln a} = \ln a \cdot a^x$

نکته: $(a^u)' = u' a^u \ln a$ مثال:

$(3^x)' = 3^x \cdot \ln 3$

$(3^{\sin x})' = 3^{\sin x} \cdot \cos x \cdot \ln 3$

انتگرال a^u: $\int a^u\,du = \frac{a^u}{\ln a} + c$ مثال: $\int 3^x\,dx = \frac{3^x}{\ln 3} + c$

نکته: $\left(\frac{a^u}{\ln a}\right)' = \frac{1}{\cancel{\ln a}}(u' a^u \cancel{\ln a})$

مثال: مشتق تابع زیر را محاسبه کنید. $y = x^x$ $\quad (\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$\xrightarrow{\ln} \ln y = \ln x^x \Rightarrow \ln y = x \ln x \xrightarrow{\text{مشتق}} \frac{y'}{y} = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} \Rightarrow y' = y(1+\ln x) \Rightarrow y' = x^x(1+\ln x)$

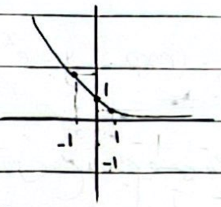
لگاریتم x در مبنای a:

می‌دانیم اگر a عددی مثبت به جز ۱ باشد تابع a^x یک به یک و وارون پذیر خواهد بود وارون این تابع را با $\log_a^x$ نشان می‌دهیم. یعنی:

$(\log_a^x)^{-1} = a^x$

نکته: 1. $\log_a^{a^x} = x$ $\quad$ 2. $a^{\log_a^x} = x$

سوال: اگر $0<a<1$ تابع a^x یک تابع نزولی است. علت را بررسی کنید. (نمودار تابع $(\frac{1}{2})^x$ را هم رسم کنید)



$(\frac{1}{2})^{-1} = 2 \quad (\frac{1}{2})^{1} = \frac{1}{2}$

نکته: $\log_a^x = \frac{\ln x}{\ln a}$ ، اثبات:

$a^{\log_a^x} = x \xrightarrow{\ln} \ln(a^{\log_a^x}) = \ln x \Rightarrow \log_a^x \ln a = \ln x \Rightarrow \log_a^x = \frac{\ln x}{\ln a}$

$\ln e$

محاسبه مشتق $\log_a^x$:

$(\log_a^x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x} = (\log_x^e)\left(\frac{1}{x}\right)$

نکته: $(\log_a^u)' = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{u'}{u}$

مثال: $(\log_2^{1+x^2})' = \frac{1}{\ln 2} \cdot \frac{2x}{x^2+1}$

مثال: نشان دهید نمودار $y = x^\pi - \pi^x$ در $x=\pi$ دارای شیب منفی است.

$y = x^\pi - \pi^x$

$\xrightarrow{\text{مشتق}} \pi x^{\pi-1} - \pi^x \ln \pi = y' \xrightarrow{x=\pi} \pi \times \pi^{\pi-1} - \pi^\pi \ln \pi = \underbrace{\pi^\pi}_{>0}\underbrace{(1 - \ln\pi)}_{<0} < 0$ ، شیب منفی در $x=\pi$

($1 = \ln e$)

خواص لگاریتم:

1. $\log_a^{xy} = \log_a^x + \log_a^y$ $\quad$ 2. $\log_a^{\frac{x}{y}} = \log x - \log y$

3. $\log_a^{x^y} = y \log_a^x$ $\quad$ 4. $\log_a^{\frac{1}{x}} = \log_a^{x^{-1}} = -\log_a^x$

مثال :

A) $\lim_{x\to 0^+} (1+x)^{\frac{1}{x}}$ $\quad f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}} \xrightarrow{Ln} Ln\, f(x) = Ln\, (1+x)^{\frac{1}{x}}$ $\quad ln\, f(x) = \frac{1}{x} Ln\, (1+x)$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+} Ln\, f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} Ln(1+x)$$

پیوسته است پس می تواند از حد بیرون بیاید

$$Ln \lim_{x\to 0^+} f(x) \overset{H}{=} \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = 1 \qquad e^{\ln \lim_{x\to 0^+} f(x)} = e^1$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = e$$

به دلیل اینکه ابتدا خواستیم از ln ها خلاص شویم از وارون ln ها یعنی e استفاده کردیم

حالت های مبهم :

همانطور که در مبحث حد دیدیم ممکن است در محاسبه حد به صور مبهم برخورد کنیم ۳ حالت مبهم در محاسبه حد به صورت : ∞^0 ، 0^0 ، 1^∞ می باشد که برای رفع ابهام در این حالت ها می توان از خواص تابع ln کمک گرفت (مثال در بالای صفحه)

نکته :

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = 1^\infty = \lim_{x\to a} e^{(f(x)-1).(g(x))}$$

مثال :

$$\lim_{x\to 0^+} (1+x)^{\frac{1}{x}} = 1^\infty = \lim_{x\to 0^+} e^{(1+x-1).\frac{1}{x}} = e^1$$

B) $\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = \infty^0$ $\quad f(x) = x^{\frac{1}{x}}$ $\quad \ln f(x) = \frac{1}{x} \ln x \xrightarrow{\lim} Ln \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim \frac{1}{x} f(x)$ $\quad \frac{\infty}{\infty}$

$$\xrightarrow{Hop} \ln \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0 \xrightarrow[\text{توان می بریم}]{\text{وارون e به}} \lim_{x\to\infty} f(x) = e^0 = 1$$

C) $\lim_{x\to 1} (1+\sin\pi x)^{\cot\pi x} = 1^\infty$ $\quad$ نکته : $\lim_{x\to 1} e^{(1+\sin\pi x-1).\cot g\pi x} = \lim_{x\to 1} e^{\sin\pi x . \frac{\cos\pi x}{\sin\pi x}} = e^{-1}$ یا $\frac{1}{e}$

مثال فوق را با استفاده از ln ها حل کنید.

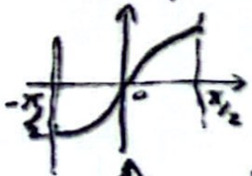
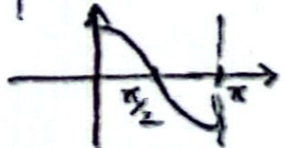
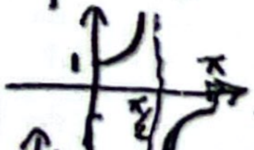
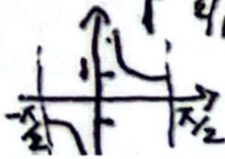
$$f(x) = (1+\sin\pi x)^{\cot\pi x} \xrightarrow{Ln} \ln f(x) = \cot\pi x \left(\ln(1+\sin\pi x) \right)$$

$$\xrightarrow{\lim} \ln \lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{1}{\tan\pi x} (\ln 1 + \ln \sin\pi x) \xrightarrow{H} \frac{\frac{\cancel{\pi}(\cos\pi x)}{\sin\pi x}}{\cancel{\pi}(1+tg^2\pi x)} = \cot\pi x$$

توابع معکوس مثلثاتی :

شش تابع اصلی مثلثاتی یک به یک نیستند اما میتوان دامنه آنها را در فواصلی محدود کرد تا یک به یک گردند.

1. $\sin x$
2. $\cos x$
3. $tg\, x$
4. $cotg\, x$
5. $\sec x = \frac{1}{\cos x}$
6. $\csc x = \frac{1}{\sin x}$

تابع	دامنه	برد	رسم شکل
$\sin x$	$[-\pi/2, \pi/2]$	$[-1,1]$	
$\cos x$	$[0,\pi]$	$[-1,1]$	
$tg\, x$	$(-\pi/2, \pi/2)$	$(-\infty, \infty)$	
$cotg\, x$	$(0,\pi)$	$(-\infty, \infty)$	
$\sec x$	$[0,\pi/2) \cup (\pi/2, \pi]$	$(-\infty,-1] \cup [1,\infty)$	
$\csc x$	$[-\pi/2, 0) \cup (0, \pi/2]$	$(-\infty,-1] \cup [1,\infty)$	

توابع محدود شده جدول فوق یک به یک هستند و دارای معکوس می‌باشند که بصورت زیر قابل نمایش است.

نحوه کلی: ← $y=\sin^{-1}x=\arcsin x$, $y=\cos^{-1}x=\arccos x$, $y=tg^{-1}x=arc\,tg\,x$

$y^{-1}=arc\,y$ $\quad y=cotg^{-1}x=arc\,cotg\,x$, $y=\sec^{-1}x=arc\sec x$, $y=\csc^{-1}x=arc\csc x$

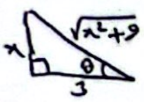
نکته: $\sin^{-1}x$ نسبت به مبدأ مختصات متقارن و در نتیجه تابعی فرد است. $\sin^{-1}(-x)=-\sin^{-1}x$

نکته: هر تابعی که نسبت به مبدأ مختصات متقارن باشد تابعی فرد است.

مثال: مطلوبست تعیین $\sec(\underbrace{tg^{-1}\frac{x}{3}}_{\theta})$

در این سوال ابتدا $tg^{-1}\frac{x}{3}$ را θ گرفته پس از روی tg می‌گیریم ...

$\theta=tg^{-1}\frac{x}{3} \rightarrow tg\,\theta=\frac{x}{3}$



$\sec\theta=\frac{1}{\cos\theta}=\frac{\text{وتر}}{\text{مجاور}}=\frac{\sqrt{x^2+9}}{3}$

محاسبه مشتق توابع معکوس مثلثاتی: ← ۳ مورد اصلی sin و tg و sec باقی توابع قرینه هریک از این‌ها ← همه در قالب کسر و رادیکال

۱- محاسبه مشتق $\sin^{-1}x$:

$f(x)=\sin x$, $f^{-1}(x)=\sin^{-1}x$

$$\rightarrow (f^{-1})'(x)=\frac{1}{f'(f^{-1}(x))}=\frac{1}{\cos(\sin^{-1}x)}\underset{\cos u=\sqrt{1-\sin^2u}}{=}\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\sin^{-1}x)}}\underset{\sin(\sin^{-1}x)=x}{=}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

به همین ترتیب می‌توان مشتق سایر توابع معکوس مثلثاتی را پیدا کرد که به ترتیب زیر است: حفظ

① $\frac{d}{dx}(\sin^{-1}u)=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx}$, $|u|<1$

② $\frac{d}{dx}(tg^{-1}u)'=\frac{1}{1+u^2}\frac{du}{dx}$

③ $\frac{d}{dx}(\sec^{-1}u)=\frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx}$, $|u|>1$

قرینه

④ $\frac{d}{dx}(\cos^{-1}u)=-\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx}$, $|u|<1$

⑤ $\frac{d}{dx}(cotg^{-1}u)=-\frac{1}{1+u^2}\frac{du}{dx}$

⑥ $\frac{d}{dx}(\csc^{-1}u)=\frac{-1}{|u|\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx}$, $|u|>1$

فرمول‌های انتگرال‌گیری توابع معکوس مثلثاتی: $(a\neq 0)$

① $\int\frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}=\sin^{-1}\frac{u}{a}+C \quad (u^2<a^2)$

② $\int\frac{du}{a^2+u^2}=\frac{1}{a}tg^{-1}\frac{u}{a}+C \quad (\forall u)$

③ $\int\frac{du}{u\sqrt{u^2-a^2}}=\frac{1}{a}\sec^{-1}\frac{u}{a}+C \quad (|u|>a>0)$

Subject:

مثال

① $\int_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{3}/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1}x \Big]_{\sqrt{2}/2}^{\sqrt{3}/2} = \sin^{-1}(\sqrt{3}/2) - \sin^{-1}(\sqrt{2}/2) = \pi/3 - \pi/4 = \pi/12$

② $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = tg^{-1}x \Big]_0^1 = tg^{-1}(1) - tg^{-1}(0) = \pi/4 - 0 = \pi/4$

③ $\int_{2/\sqrt{3}}^{\sqrt{2}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \sec^{-1}x \Big]_{2/\sqrt{3}}^{\sqrt{2}} = \underbrace{\pi/4}_{\cos^{-1}(\sqrt{2}/2)} - \underbrace{\pi/6}_{\cos^{-1}(\sqrt{3}/2)} = \pi/12$

④ $\int \frac{dx}{\sqrt{3-4x^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}$ $\quad (a=\sqrt{3},\ u=2x,\ du=2dx)$

1. نکته: به دلیل تغییر متغیرها باید du و dx را هم حساب سازی کنیم

$= \frac{1}{2}\sin^{-1}(\frac{u}{a}) + C = \frac{1}{2}\sin^{-1}(\frac{2x}{\sqrt{3}}) + C$

⑤ $\int \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{4-(x-2)^2}} = \sin^{-1}(\frac{x-2}{2}) + C$

2. نکته: a حتماً باید عدد باشد

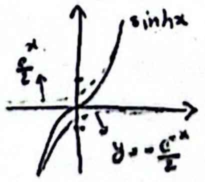
⑥ $\int \frac{dx}{\sqrt{e^{2x}-6}} = \int \frac{\frac{du}{u}}{\sqrt{u^2-a^2}}$ $\quad \begin{cases} u=e^x \to du = e^x dx \to \frac{du}{e^x} = dx \\ a=\sqrt{6} \end{cases}$

$= \int \frac{du}{u\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}(u/a) + C = \frac{1}{\sqrt{6}}\sec^{-1}(\frac{e^x}{\sqrt{6}}) + C$

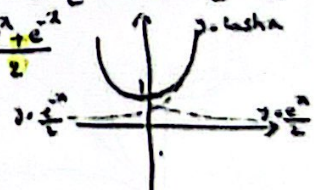
توابع هذلولوی:

این توابع از ترکیب دو تابع نمایی e^x و e^{-x} بدست می‌آیند و بصورت زیر تعریف می‌شوند:

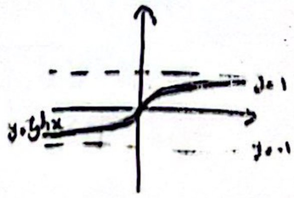
$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ فرد



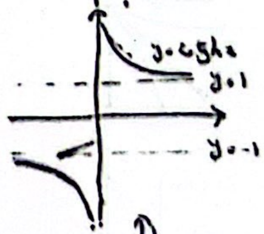
$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ زوج



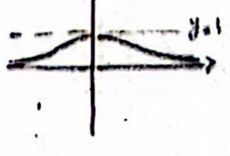
$tg\,hx = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$



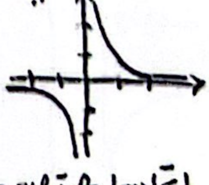
$ctg\,hx = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$



$\text{sech}\,x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$



$y = \text{csch}\,x = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$



اتحادها در توابع هذلولوی:

$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$, $\sinh 2x = 2\sinh x \cosh x$

$\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x$, $\cosh^2 x = \frac{\cosh 2x + 1}{2}$, $\sinh^2 x = \frac{\cosh 2x - 1}{2}$

$tgh^2 x = 1 - \text{sech}^2 x$, $ctgh^2 x = 1 + \text{csch}^2 x$

مشتق و انتگرال توابع هذلولوی:

فرمولهای مشتق گیری:

← خودشان ←

$$\frac{d}{dx}(\sinh u) = \cosh u \frac{du}{dx} \quad , \quad \frac{d}{dx}(\cosh u) = \sinh u \frac{du}{dx}$$

← توان 2 دارد ←

$$\frac{d}{dx}(\tanh u) = \operatorname{sech}^2 u \frac{du}{dx} \quad , \quad \frac{d}{dx}(\coth u) = -\operatorname{csch}^2 u \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sech} u) = -\operatorname{sech} u \tanh u \frac{du}{dx} \quad , \quad \frac{d}{dx}(\operatorname{csch} u) = -\operatorname{csch} u \coth u \frac{du}{dx}$$

← منفی دارد دوتایی ها ←

فرمولهای انتگرالگیری:

$$\int \sinh u \, du = \cosh u + C \quad , \quad \int \cosh u \, du = \sinh u + C$$

$$\int \operatorname{sech}^2 u \, du = \tanh u + C \quad , \quad \int \operatorname{csch}^2 u \, du = -\coth u + C$$

$$\int \operatorname{sech} u \tanh u \, du = -\operatorname{sech} u + C \, , \quad \int \operatorname{csch} u \coth u \, du = -\operatorname{csch} u + C$$

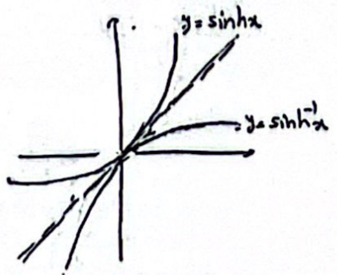
مثال:

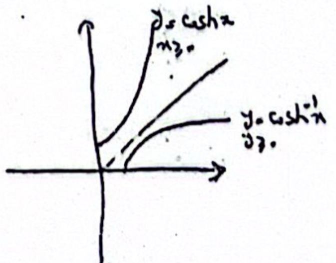
① $\frac{d}{dt}(\tanh\sqrt{1+t^2}) = \operatorname{sech}^2\sqrt{1+t^2} \cdot \frac{d}{dt}(\sqrt{1+t^2}) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \cdot \operatorname{sech}^2\sqrt{1+t^2}$

② $\int \coth 5x \, dx = \int \frac{\cosh 5x}{\sinh 5x} dx = \frac{1}{5}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{5}\ln|\sinh 5x| + C$ $\qquad u = \sinh 5x$, $du = 5\cosh 5x \, dx$

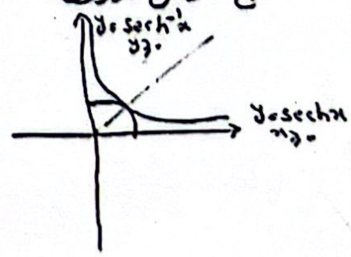
③ $\int_0^{\ln 2} 4e^x \sinh x \, dx = \int_0^{\ln 2} 4e^x \frac{e^x - e^{-x}}{2} dx = \int_0^{\ln 2} (2e^{2x} - 2) dx$

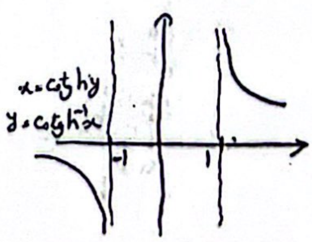
$= e^{2x} - 2x \Big]_0^{\ln 2} = (e^{2\ln 2} - 2\ln 2) - (1 - 0) = 4 - 2\ln 2 - 1$

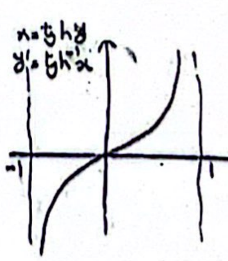


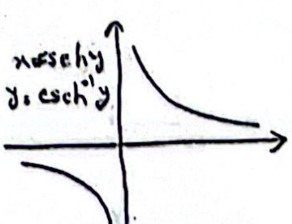


توابع معکوس هذلولوی:









نکته: $\operatorname{sech}(\cosh^{-1}(\frac{1}{x})) = \dfrac{1}{\cosh(\cosh^{-1}(\frac{1}{x}))} = \dfrac{1}{\frac{1}{x}} = x \quad (0 < x \leq 1)$

نکته ۲: $\sinh^{-1}x = \ln(x+\sqrt{x^2+1})$

$\cosh^{-1}x = \ln(x+\sqrt{x^2-1}) \quad x>1$, $tgh^{-1}x = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} \quad |x|<1$

سایر توابع معکوس هذلولوی:

$\coth^{-1}x = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1} \quad |x|>1$

مثال: $\cosh^{-1}(\sec\frac{\pi}{3}) = \cosh^{-1}(2) = \ln(2+\sqrt{3})$

$\sinh^{-1}(\sin\frac{\pi}{4}) = \sinh^{-1}(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \ln(\frac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt{\frac{3}{2}})$

$\operatorname{sech}^{-1}x = \cosh^{-1}\frac{1}{x}$

$\operatorname{csch}^{-1}x = \sinh^{-1}\frac{1}{x}$

$\operatorname{coth}^{-1}x = tgh^{-1}\frac{1}{x}$

$\cosh^{-1}(\frac{1}{x}) = \operatorname{sech}^{-1}x$ زیرا $\operatorname{sech}x$ در $(0,1]$ یک به یک است.

مشتقات توابع معکوس هذلولوی:

$$\frac{d(\sinh^{-1}u)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\frac{du}{dx}, \quad \frac{d(\cosh^{-1}u)}{dx} = \frac{1}{\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx} \quad (u>1)$$

آیا مثل هم است؟

$$\frac{d(tgh^{-1}u)}{dx} = \frac{1}{1-u^2}\frac{du}{dx} \quad (|u|<1), \quad \frac{d(\coth^{-1}u)}{dx} = \frac{1}{1-u^2}\frac{du}{dx} \quad (|u|>1)$$

$$\frac{d(\operatorname{sech}^{-1}u)}{dx} = \frac{-1}{u\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx} \quad (0<u<1), \quad \frac{d(\operatorname{csch}^{-1}u)}{dx} = \frac{-1}{|u|\sqrt{1+u^2}} \quad (u \neq 0)$$

نحوه محاسبه: $\frac{d}{dx}(\cosh^{-1}u) = ?$ $\quad f(x) = \cosh x$, $f^{-1}(x) = \cosh^{-1}x \quad (x>1)$

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{\sinh(\cosh^{-1}x)} = \frac{1}{\sqrt{\cosh^2(\cosh^{-1}x)-1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

انتگرالگیری منجر به توابع معکوس هذلولوی:

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2+u^2}} = \sinh^{-1}(\frac{u}{a})+C \quad (a>0)$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}} = \cosh^{-1}(\frac{u}{a})+C \quad (u>a>0)$$

$$\int \frac{du}{a^2-u^2} = \begin{cases} \frac{1}{a}tgh^{-1}(\frac{u}{a})+C & u^2<a^2 \\ \frac{1}{a}\coth^{-1}(\frac{u}{a})+C & u^2>a^2 \end{cases}$$

$$\int \frac{du}{u\sqrt{a^2-u^2}} = -\frac{1}{a}\operatorname{sech}^{-1}(\frac{u}{a})+C \quad 0<u<a$$

$$\int \frac{du}{u\sqrt{u^2+a^2}} = \frac{-1}{a}\operatorname{csch}^{-1}\left|\frac{u}{a}\right|+C \quad u\neq 0, a>0$$

مثال: $\int_0^1 \frac{2\,dx}{\sqrt{3+4x^2}} = \sinh^{-1}(\frac{2x}{\sqrt{3}})\Big]_0^1 = \sinh^{-1}\frac{2}{\sqrt{3}} - 0$

«روش های انتگرال گیری»

در محاسبه انتگرال ها ممکن است به مواردی برخورد کنیم که به صورت مستقیم با استفاده از فرمول های انتگرال گیری قابل محاسبه نباشند.

در این مواقع از روش های انتگرال گیری کمک می گیریم.

۱. روش تغییر متغیر: این روش زمانی استفاده می شود که بتوان با استفاده از یک تعریف جدید شکل انتگرال را برطرف کرد و آن را شبیه یکی از فرمول های انتگرال گیری نوشت.

مثل:

مراحل حل این روش:

1. انتخاب عبارت $= u$

2. مشتق گرفتن از هر دو عبارت و تعیین رابطه dx و du

3. جایگذاری و رسیدن به فرم های اصلی انتگرال گیری

4. حل طبق فرم های اصلی

$$1.\ \int (x-1)^{20}\,dx = \int u^{20}\,du = \frac{u^{21}}{21} + C = \frac{(x-1)^{21}}{21} + C$$

$x-1=u \xrightarrow{\text{مشتق}} dx = du$

$$2.\ \int e^{2x}\,dx = \int e^{u}\left(\frac{1}{2}du\right) = \frac{1}{2}\int e^{u}\,du = \frac{1}{2}e^{u} + C = \frac{1}{2}e^{2x} + C$$

$2x = u$

$\xrightarrow{\text{مشتق}} 2dx = du \quad dx = \frac{du}{2}$

$$3.\ \int \sin 3x\,dx = \int \sin u\left(\frac{1}{3}du\right) = \frac{1}{3}\int \sin u\,du = -\frac{1}{3}\cos u + C = \frac{-1}{3}\cos 3x + C$$

$3x = u$

$\xrightarrow{\text{مشتق}} 3dx = du \quad dx = \frac{du}{3}$

راه حل ①:

$$4.\ \int x\sqrt{x-1}\,dx = \int (u^2+1)u(2u\,du) = 2\int (u^4+u^2)\,du = 2\left(\frac{u^5}{5}+\frac{u^3}{3}\right) + C = 2\left(\frac{(\sqrt{x-1})^5}{5}+\frac{(\sqrt{x-1})^3}{3}\right) + C$$

$\sqrt{x-1} = u \quad x-1 = u^2$

$x = u^2+1 \quad dx = 2u\,du$

راه حل ②:

$x-1 = u \quad dx = du$

$$\int (1+u)\sqrt{u}\,du = \int \left(u^{\frac{1}{2}} + u^{\frac{3}{2}}\right) du = \frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}} + C = \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{5}(x-1)^{\frac{5}{2}} + C$$

$$5.\ \int \frac{x\,dx}{\sqrt{(1+x^2)\sqrt{(1+x^2)^3}}} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{\sqrt{u\sqrt{u^3}}} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^{\frac{1}{2}}\cdot u^{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^{\frac{5}{4}}} = \frac{1}{2}\int u^{-\frac{5}{4}}\,du = \frac{1}{2}\times\frac{u^{-\frac{1}{4}}}{-\frac{1}{4}} + C = -2(1+x^2)^{-\frac{1}{4}} + C$$

$1+x^2 = u$

$2x\,dx = du \quad x\,dx = \frac{du}{2}$

$$6.\ \int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx \quad x>0 \quad = \int \cos u\,(2\,du) = 2\int \cos u\,du = 2\sin u + C = 2\sin\sqrt{x} + C$$

$\sqrt{x} = u \quad \frac{dx}{2\sqrt{x}} = du \quad \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\,du$

7. $\int \sin^n x \cdot \cos x \, dx \quad (n \neq -1)$

$\cos x = u$ $\sin x = u$ $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C = \frac{(\sin x)^{n+1}}{n+1} + C$

پس $-\sin x\, dx = du \rightarrow \int u$ × تغییر متغیر نادرست $\cos x\, dx = du$

قضیه تغییر متغیر برای انتگرال های معین :

اگر برای حل یک انتگرال معین از روش تغییر متغیر استفاده کنیم (مثلاً: تابع $f(x)$ تحت انتگرال را براساس متغیر u بازنویسی کنیم) آنگاه لازم است کران های انتگرال نیز براساس متغیر جدید تعریف شود.

مثال:

1. $\int_1^2 \frac{x}{1+x^2} dx$

x	u
1	2
2	5

$\int_2^5 \frac{\frac{1}{2}du}{u} = \frac{1}{2}\int_2^5 \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln|u|\Big]_2^5 = \frac{1}{2}(\ln 5 - \ln 2) + C$

$1 + x^2 = u$

$2x\,dx = du \qquad x\,dx = \frac{du}{2}$

2. $\int_{\frac{\pi^2}{4}}^{\pi^2} \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$

x	u
$\frac{\pi^2}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
π^2	π

$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos u\,(2du) = 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos u\, du = 2\sin u\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = 2(\sin\pi - \sin\frac{\pi}{2}) = -2 + C$

$\sqrt{x} = u$

$\frac{dx}{2\sqrt{x}} = du \qquad \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2du$

2. انتگرال گیری از حاصلضرب های توان دار نسبت های مثلثاتی : اگر توان زوج یا فرد برای sin و cos باشد در عبارت تحت sin و cos داشته باشیم

الف) اگر توان $\sin x$ ، $\cos x$ فرد باشد.

$\int \cos^{2k+1} x\, dx = \int \cos^{2k} \cdot \cos x\, dx$

که باید تغییر متغیر u را انجام دهیم و u خارج عبارت در انتگرال است

$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x \qquad u = \sin x$

مثال:

$\int \sin^5 x\, dx = \int \sin^4 x\,(\sin x\, dx) = \int (1 - \cos^2)^2 (\sin x\, dx) = \int (1 - u^2)^2(-du) = -\int (1 - u^2)^2 du =$

$-\int (1 + u^4 - 2u^2)\, du = -u - \frac{u^5}{5} + \frac{2}{3}u^3 + C = -\cos x - \frac{\cos^5 x}{5} + \frac{2}{3}\cos^3 x \qquad \sin^2 x = 1 - \cos^2 x \quad \begin{cases} u = \cos x \\ du = -\sin x\, dx \\ \sin x\, dx = -du \end{cases}$

$\int \sin^{2k} x\, dx$

ب) اگر توان $\sin x$ و $\cos x$ زوج باشد. قرار می دهیم :

$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \qquad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$

مثال:

$\int \cos^4 x\, dx = \int (\cos^2 x)^2 dx = \int \left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int (1 + \cos^2 2x + 2\cos 2x)\, dx = \frac{1}{4}\left(x + \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{4}\sin 4x\right) + \sin 2x\right)$

چجوری تبدیل به این شد؟

دقت: حاصل ضرب u در dv باید تمام عبارت تحت انتگرال را بسازد

3. انتگرال گیری به روش جزء به جزء:

$\int d(vu) = \int v\,du + \int u\,dv$ ($d(vu)$ عبارت $\underbrace{vu}$) $\qquad \int u\,dv = uv - \int v\,du$

روش حل:

1. u و dv را پیدا کن 2. از u مشتق و از dv انتگرال بگیر

3. به صورت $uv - \int v\,du$ بنویس و حل کن

1. $\int x \sin x\,dx$

حالت اول: $u = x \qquad du = dx$

$dv = \sin x\,dx \qquad \int dv = \int \sin x\,dx \qquad v = -\cos x$

$= -x\cos x - \int (-\cos x)\,dx = -x\cos x + \sin x + C$

حالت دوم: $u = \sin x \qquad du = \cos x\,dx$

$dv = x\,dx \qquad v = \frac{x^2}{2}$

$= \frac{x^2}{2}\sin x - \int \frac{x^2}{2}\cos x\,dx$

2. $\int x^2 \cos x\,dx$

$u = x^2 \xrightarrow{\text{مشتق}} 2x\,dx = du$

$\cos x\,dx = dv \xrightarrow{\text{انتگرال}} v = \sin x$

$2\,dx = du$

$v = -\cos x$

$= x^2 \sin x - \int 2x \sin x\,dx = x^2 \sin x - \left(-2x\cos x - \int -2\cos x\,dx\right)$

$= x^2 \sin x + 2x\cos x \oplus 2\sin x + C$

باید مثبت باشد (خطای استاد)

مثال مستقل: $\int \cos 4x\,dx = \int \cos u \left(\frac{1}{4}du\right) = \frac{1}{4}\int \cos u\,du = \frac{1}{4}\sin 4x + C$

$4x = u \qquad 4\,dx = du$

3. $\int e^x \cos x\,dx = A$

$u = e^x \qquad e^x\,dx = du$

$\cos x\,dx = dv \qquad v = \sin x$

$= e^x \sin x - \int \sin x\, e^x\,dx \qquad \begin{cases} e^x = u & du = e^x\,dx \\ \sin x\,dx = dv & v = -\cos x \end{cases}$

$= e^x \sin x - \left(-e^x\cos x - \int e^x(-\cos x)\,dx\right) = e^x \sin x + e^x \cos x - \underbrace{\int e^x \cos x\,dx}_{A}$

$2A = e^x(\sin x + \cos x) \qquad A = \frac{1}{2}e^x(\sin x + \cos x) + C$

در این روش عینا انتگرال باید تکرار شده باشد می‌تواند فقط در ضریب تغییر کند

4. $\int \ln x\,dx$

$= x\ln x - \int x \cdot \frac{dx}{x} = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C$

$u = \ln x \qquad du = \frac{dx}{x}$

$dv = dx \qquad v = x$

5. $\int \sec^3 x\,dx = \int \sec x \sec^2 x\,dx = A$

$= \sec x\,\mathrm{tg}\,x - \int \sec x\,\underbrace{\mathrm{tg}^2 x}_{\sec^2 x - 1}\,dx$

$u = \sec x \qquad du = \sec x \cdot \mathrm{tg}\,x\,dx$

$dv = \sec^2 x\,dx \qquad dv = \sec^2 x\,dx \qquad v = \mathrm{tg}\,x \qquad = \sec x\,\mathrm{tg}\,x - \underbrace{\int \sec^3 x\,dx}_{A} + \int \sec x\,dx$

$2A = \sec x\,\mathrm{tg}\,x + \int \sec x\,dx = \sec x\,\mathrm{tg}\,x + \ln|\sec x + \mathrm{tg}\,x| \qquad A = \frac{1}{2}\left(\sec x\,\mathrm{tg}\,x + \ln|\sec x + \mathrm{tg}\,x|\right) + C$

$\int \sec x\,dx = \ln|\sec x + \mathrm{tg}\,x| + C$

+ روش جدول انتگرال گیری :

این روش تعمیمی از روش جزبه‌جز است که در آن لازم است جدولی رسم نماییم در سمت چپ جدول تابعی را قرار دهیم که پس از چند مرتبه مشتق گیری به صفر برسد و در سمت راست جدول تابعی را قرار دهیم که بتوان به راحتی از آن انتگرال گرفت سپس حاصل ضرب مورب توابع جدول را با علامت یکی در میان، مثبت و منفی در نظر می‌گیریم و به عنوان جواب انتگرال معرفی می‌کنیم.

1. $\int x\sin x\,dx$

$$\begin{array}{c|c} u & dv \\ \hline \oplus\ x & \sin x\,dx \\ \ominus\ 1 & -\cos x \\ 0 & -\sin x \end{array}$$

مشتق — انتگرال

$= -x\cos x + \sin x + C$

2. $\int x^2\cos x\,dx$

$$\begin{array}{c|c} u & dv \\ \hline \oplus\ x^2 & \cos x\,dx \\ \ominus\ 2x & \sin x \\ \oplus\ 2 & -\cos x \\ 0 & -\sin x \end{array}$$

مشتق — انتگرال

$= x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C$

نکته: روش جدول انتگرال گیری قابلیت حل همه انتگرال هایی که با روش جزبه‌جز حل می‌شوند را ندارد مثلاً در محاسبه انتگرال $e^x\cos x\,dx$ مشتق هیچ یک از دو تابع به صفر نمی‌رسد یا در محاسبه $\int x^2 tg^{-1}x\,dx$ محاسبه انتگرال تابع $tg^{-1}x$ کار ساده‌ای نمی‌باشد. (فقط مسائل خاص)

4. انتگرال گیری با تغییر متغیر مثلثاتی (جانشانی مثلثاتی):

در صورتی که عبارت تحت انتگرال یکی از 3 حالت زیر را دارا باشد با تغییر متغیر مثلثاتی مربوطه انتگرال را حل می‌کنیم:

A) $\sqrt{a^2-x^2}$ $\quad x=a\sin\theta$ $\qquad$ B) $\sqrt{x^2-a^2}$ $\quad x=a\sec\theta$ $\qquad$ C) $\sqrt{x^2+a^2}$ $\quad x=a\,tg\theta$

نکته: $\int \sec^2 x\,dx = tg\,x$

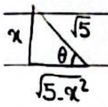
1. $\int \dfrac{dx}{(5-x^2)^{\frac{3}{2}}}$ $\quad a^2$

$x=\sqrt{5}\sin\theta$

$dx=\sqrt{5}\cos\theta\,d\theta$

$$=\int \frac{\sqrt{5}\cos\theta\,d\theta}{(5-(\sqrt{5}\sin\theta)^2)^{\frac{3}{2}}}=\int \frac{\sqrt{5}\cos\theta\,d\theta}{(5(1-\sin^2\theta))^{\frac{3}{2}}}=\int \frac{\cancel{\sqrt{5}}\cos\theta\,d\theta}{5\sqrt{5}\ \cos^3\theta}$$

$\cos^2\theta$



در نهایت باید براساس x باشد نه θ

$$=\frac{1}{5}\int\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta=\frac{1}{5}\int \sec^2\theta\,d\theta=\frac{1}{5}tg\theta+C=\frac{1}{5}\times\frac{x}{\sqrt{5-x^2}}+C$$

2. $\int \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-9}}\,dx$

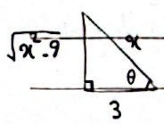
$x=3\sec\theta$

$dx=3\sec\theta\,tg\theta\,d\theta$

$$=\int\frac{9\sec^2\theta}{\sqrt{9\sec^2\theta-9}}(3\sec\theta\,tg\theta\,d\theta)=\int\frac{9\sec^2\theta}{3\,tg\theta}(3\sec\theta\,tg\theta)\,d\theta$$

$9(\sec^2\theta-1)$

$tg^2\theta$

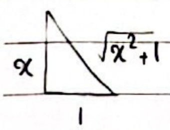


$$=9\int\sec^3 d\theta$$

$$=9\times\frac{1}{2}\left(\frac{x}{3}\times\frac{\sqrt{x^2-9}}{3}+\ln\left|\frac{x}{3}+\frac{\sqrt{x^2-9}}{3}\right|\right)$$

3. $\int\dfrac{dx}{(1+x^2)^2}$ $\qquad x=tg\theta$ $\qquad dx=(1+tg^2\theta)\,d\theta$

$$=\int\frac{(1+tg^2\theta)\,d\theta}{(1+tg^2\theta)^2}=\int\frac{d\theta}{1+tg^2\theta}=\int\frac{d\theta}{\sec^2\theta}=\int\cos^2\theta\,d\theta$$



$$=\int\frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta=\frac{1}{2}\theta+\frac{1}{4}\sin\theta+C=$$ بازنویسی براساس x

نکته: در این روش انتگرال گیری بعد از اینکه مخرج نوشتیم صورت و مخرج با هم ارتباطی ندارند تا زمان تعیین A و B و ... با صورت کاری نداریم

5. انتگرال گیری از عبارت های کسری گویا:

اگر عبارت تحت انتگرال به صورت $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$ باشد که در آن P و Q چند جمله ای هستند نسبت به رابطه بین صورت و مخرج توجه می کنیم اگر ارتباطی وجود داشت درجه صورت و مخرج را در نظر می گیریم چنانچه درجه صورت از مخرج بیشتر یا مساوی باشد عبارت صورت را بر مخرج تقسیم می کنیم و سپس انتگرال گیری را انجام می دهیم. در غیر این صورت از روش تجزیه کسرها برای انتگرال گیری استفاده می کنیم.

الف) اگر پس از تجزیه مخرج به عوامل درجه اول بدون تکرار رسیدیم متناظر با هر عامل یک کسر در نظر می گیریم و سپس به محاسبه انتگرال می پردازیم.

$$+\int \frac{x+2}{x^3-x}dx = \int\left(\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+1}\right)dx = -2\int\frac{dx}{x}+\frac{3}{2}\int\frac{dx}{x-1}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+1} = -2\ln|x|+\frac{3}{2}\ln|x-1|+\frac{1}{2}\ln|x+1|+C$$

$$x^3-x = x(x^2-1) = x(x-1)(x+1)$$

$$\frac{x+2}{x^3-x} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+1} = \frac{A(x^2-1)+Bx(x+1)+Cx(x-1)}{x(x+1)(x-1)}$$

روش اول
$$\begin{cases} -A=2 & A=-2 \\ 2B=3 & B=\frac{3}{2} \\ 2C=1 & C=\frac{1}{2} \end{cases}$$

روش دوم
$$\begin{cases} A+C+B=0 & B+C=2 \\ B-C=1 & B=\frac{3}{2} \quad C=\frac{1}{2} \\ -A=2 & A=-2 \end{cases}$$

عوامل درجه اول (بخش الف و ب) فقط ضریب عددی اعمال می شود

ب) اگر پس از تجزیه مخرج کسر به عوامل درجه اول با درجه تکرار k رسیدیم: $Q(x)=(x-a)^k$

پس از تجزیه عاملی که k بار تکرار شده از 1 تا k برایش کسر در نظر می گیریم

$$\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int\left(\frac{A_1}{(x-a)}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\dots+\frac{A_k}{(x-a)^k}\right)dx$$

$$+\int\frac{dx}{x^3+3x^2}$$

$$\int\frac{dx}{x^3+2x^2} = \int\left(\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x+3}\right)dx = -\frac{1}{9}\int\frac{dx}{x}+\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x^2}+\frac{1}{9}\int\frac{dx}{x+3} = -\frac{1}{9}\ln|x|+\frac{1}{3}\frac{x^{-1}}{-1}+\frac{1}{9}\ln|x+3|+C$$

$$x^3+3x^2 = x^2(x+3)$$

عامل درجه اول با درجه تکرار 2 — عامل درجه اول بدون تکرار

$$\frac{1}{x^3+3x^2} = \frac{Ax(x+3)+B(x+3)+Cx^2}{x^2(x+3)}$$

$$\begin{cases} 3B=1 & B=\frac{1}{3} \\ 9C=1 & C=\frac{1}{9} \\ A+C=0 & A=-\frac{1}{9} \end{cases}$$

ج) اگر پس از تجزیه مخرج کسر به عوامل درجه دوم غیر قابل تجزیه بدون درجه تکرار رسیدیم، داریم:

$$\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int\frac{Ax+B}{h(x)}dx$$

$$+\int\frac{x^2+3x+2}{x(x^2+1)}dx = \int\left(\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}\right)dx = 2\int\frac{dx}{x}-\frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2+1}dx+3\int\frac{dx}{x^2+1} = 2\ln|x|-\frac{1}{2}\ln|x^2+1|+3\,tg^{-1}x+C$$

$$\frac{x^2+3x+2}{x(x^2+1)} = \frac{A(x^2+1)+(Bx+C)x}{x(x^2+1)}$$

$$\begin{cases} A+B=1 & B=-1 \\ C=3 \\ A=2 \end{cases}$$

نکته: $\int\frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a}tg^{-1}\left(\frac{u}{a}\right)+C$

د) اگر پس از تجزیه مخرج کسر به عوامل درجه دوم غیرقابل تجزیه با مرتبه تکرار k رسیدیم:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \int \frac{A_1x+B_1}{h(x)} + \frac{A_2x+B_2}{h^2(x)} + \dots + \frac{A_kx+B_k}{h^k(x)}\,dx$$

$$+ \int \frac{2x^2+3}{(x^2+1)^2}\,dx = \int \left(\frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)^2}\right) dx = 2\int \frac{dx}{x^2+1} + \int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$$

عامل درجه دوم غیرقابل تجزیه با تکرار 2

$$= 2\,tg^{-1}x + \dots$$

$$\frac{2x^2+3}{(x^2+1)^2} = \frac{(Ax+B)(x^2+1)+Cx+D}{(x^2+1)^2}$$

$$Ax^3+Ax+Bx^2+B$$

$$\begin{cases} A=0 \\ B=2 \\ A+C=0 \quad C=0 \\ B+D=3 \quad D=1 \end{cases}$$

6. محاسبه انتگرال با استفاده از روش نصف قوس یا نصف کمان:

شامل csc , sec هم می‌شود

اگر عبارت تحت انتگرال بر اساس توابع $\sin ax$ و $\cos ax$ باشد (یا حاصل ضرب آن‌ها) با استفاده از روابط مثلثاتی $\sin 2x = \frac{2\,tgx}{1+tg^2x}$ و $\cos 2x = \frac{1-tg^2x}{1+tg^2x}$ و در نظر گرفتن تغییر متغیر $u = tgx$ به حل انتگرال می‌پردازیم.

a می‌تواند ۱ هم باشد

$$+ \int \sec x\,dx = \int \frac{1}{\cos x}\,dx = \int \frac{1}{\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}}\,dx = \int \frac{1+tg^2\frac{x}{2}}{1-tg^2\frac{x}{2}}\,dx \qquad \begin{cases} u = tg\frac{x}{2} \\ du = \frac{1}{2}\left(1+tg^2\frac{x}{2}\right)dx \end{cases}$$

$$= \int \frac{2du}{1-u^2} = 2\int \frac{du}{1-u^2} = 2\int \left(\frac{A}{1-u} + \frac{B}{1+u}\right) du$$

ادامه دهید:

$$+ \int \frac{dx}{1+\sin 2x} = \int \frac{(1+tg^2x\;dx)}{(1+tgx)^2} \qquad \begin{cases} u = tgx \\ du = (1+tg^2x)\,dx \end{cases} \qquad = \int \frac{du}{(1+u)^2} = \int (1+u)^{-2}du = \frac{(1+u)^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{1+tgx} + C$$

$$\frac{1}{1+\sin 2x} = \frac{1}{1+\frac{2tgx}{1+tg^2x}} = \frac{1}{\frac{1+tg^2x+2tgx}{1+tg^2x}} = \frac{1+tg^2x}{(1+tgx)^2}$$

7. انتگرال گیری از عبارت‌های رادیکالی (اصم):

ابتدا تغییر متغیر و سپس مشتق را محاسبه می‌کنیم

اگر در عبارت تحت انتگرال فرم $\sqrt[n]{ax+b}$ داشته باشیم برای محاسبه انتگرال از تغییر متغیر $ax+b = u^n$ استفاده می‌کنیم.

نکته: اگر در عبارت تحت انتگرال رادیکال‌ها با فرجه‌های متفاوت وجود داشتند لازم است بین فرجه‌ها ک.م.م محاسبه کنید و عدد حاصل را به عنوان توان u در نظر بگیرید.

1. $\int \sin(\sqrt{x})\,dx \qquad x = u^2 \qquad dx = 2u\,du \qquad = \int \sin\sqrt{u^2}\,(2u\,du) = 2\int u\sin u\,du = 2(-u\cos u + \sin u) + C$

$= 2(-\sqrt{x}\cos\sqrt{x} + \sin\sqrt{x}) + C$

$\oplus$	u	$\sin u$
$\ominus$	1	$-\cos u$
	0	$-\sin u$

$\int \frac{du}{u^2+a^2} = \frac{1}{a}\,tg^{-1}\left(\frac{u}{a}\right)$

2. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}\,(4+\sqrt[3]{x})} \qquad x = u^6 \qquad dx = 6u^5\,du \qquad = \int \frac{6u^5\,du}{u^3(4+u^2)} = 6\int \frac{u^2}{4+u^2}\,du = 6\left(\int du - 4\left(\frac{du}{u^2+4}\right)\right)$

$\begin{array}{r|l} u^2 & u^2+4 \\ \hline -u^2-4 & 1 \\ \hline -4 & \end{array} \qquad 1 - \frac{4}{u^2+4}$

$= 6\left(u - 4\left(\frac{1}{2}\,tg^{-1}\left(\frac{u}{2}\right)\right)\right) + C$

$u = \sqrt[6]{x}$

Subject:
Year: Month: Date:

انتگرال های ناسره: انتگرال ناسره نوع اول: اگر بازه انتگرال گیری بجای

$[a,b]$ به یکی از دو صورت $(-\infty,b]$ یا $[a,+\infty)$ باشد، آنگاه انتگرال

را ناسره نوع اول گوییم و داریم:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{c\to+\infty}\int_a^c f(x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{c\to-\infty}\int_c^b f(x)\,dx$$

نکته: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ نیز انتگرال ناسره نوع اول است. اگر نقطه ای مانند d را در نظر بگیریم و هر دو انتگرال $\int_{-\infty}^{d} f(x)\,dx$ و $\int_d^{+\infty} f(x)\,dx$ همگرا باشند، آنگاه $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ نیز همگرا است.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{d} f(x)\,dx + \int_d^{+\infty} f(x)\,dx$$

$$= \lim_{c\to-\infty}\int_c^d f(x)\,dx + \lim_{c\to+\infty}\int_d^c f(x)\,dx$$

انتگرال ناسره نوع دوم: اگر تابع $f(x)$ در نقاط $x=a$ یا $x=b$ (یا هر دو) ناپیوسته باشد یا در تمام نقاط بازه $[a,b]$ بجز $a<t<b$ پیوسته باشد $\int_a^b f(x)\,dx$ را ناسره

FARHANG

Subject:
Year: Month: Date:

نوع دوم گوییم داریم: الف) تابع $f(x)$ در $(a,b]$ پیوسته و در $x=a$ نامعین یا ناپیوسته باشد:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c\to a^+}\int_c^b f(x)\,dx$$

ب) تابع $f(x)$ در $[a,b)$ پیوسته و در $x=b$ نامعین یا ناپیوسته باشد:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c\to b^-}\int_a^c f(x)\,dx$$

ج) تابع $f(x)$ در (a,b) پیوسته و در $x=a$ و $x=b$ ناپیوسته یا نامعین باشد:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^d f(x)\,dx + \int_d^b f(x)\,dx$$

$$= \lim_{c\to a^+}\int_c^d f(x)\,dx + \lim_{c\to b^-}\int_d^c f(x)\,dx$$

د) تابع $f(x)$ در تمام نقاط $[a,b]$ بجز $a<t<b$ پیوسته باشد:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \underbrace{\int_a^t f(x)\,dx}_{\text{تحت ب}} + \underbrace{\int_t^b f(x)\,dx}_{\text{تحت الف}}$$

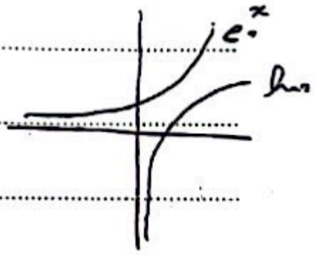
Scanned with CamScanner

مثال: همگرایی یا واگرایی انتگرال های زیر را بررسی کنید.

۱) $\int_0^{+\infty} \sin x\,dx = \lim_{c\to+\infty} \underbrace{\int_0^c \sin x\,dx}_{-\cos x\big]_0^c}$

$= \lim_{c\to+\infty} -\cos c + 1$ حد به سمت عدد ویژه میل نمی‌کند پس واگراست.

۲) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha|x|}\,dx = \underbrace{\int_{-\infty}^{0} e^{\alpha x}\,dx}_{\frac{1}{\alpha}e^{\alpha x}} + \underbrace{\int_{0}^{+\infty} e^{-\alpha x}\,dx}_{-\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha x}}$



$= \lim_{c\to-\infty}\int_c^0 e^{\alpha x}\,dx + \lim_{c\to+\infty}\int_0^c e^{-\alpha x}\,dx$

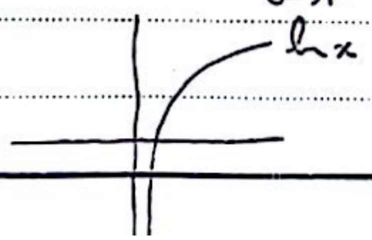
$= \lim_{c\to-\infty}\left(\frac{1}{\alpha}\left(1-\cancel{e^{\alpha c}}\right)\right) + \lim_{c\to+\infty}\left(-\frac{1}{\alpha}\left(\cancel{e^{-\alpha c}}-1\right)\right) = \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha} = \frac{2}{\alpha}$

همگرا به $\frac{2}{\alpha}$ است.

۳) $\int_1^2 \frac{dx}{x-1} = \lim_{c\to1^+}\int_c^2 \underbrace{\frac{dx}{x-1}}_{\ln|x-1|}$ $D_f = (1,2]$ $\ln \dot{e} = \infty$

$(\log_e^{0} = e^{\infty}$

$= \lim_{c\to1^+}\left(\overset{0}{\ln 1} - \ln(c-1)\right) = -\lim_{c\to1^+}\ln(c-1) = +\infty$



واگراست.

انتگرال‌های ناسره: p-انتگرال‌ها:

الف) انتگرال ناسره نوع اول

$$\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^p}$$

$$\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x^p}=\lim_{c\to+\infty}\underbrace{\int_a^{c}\frac{dx}{x^p}}_{\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\Big]_a^c}=\lim_{c\to+\infty}\frac{1}{-p+1}\left(\overset{۳}{c^{-p+1}}-a^{-p+1}\right)$$

$$\begin{cases} -p+1<0 \longrightarrow p>1 & \text{همگرا است} \\ -p+1\geq 0 \longrightarrow p\leq 1 & \text{واگرا است} \end{cases}$$

اگر $p=1$ ← $\int_a^{+\infty}\frac{dx}{x}$ واگرا است.

Subject:
Year: Month: Date:

انتگرال ناسره نوع دوم

ب) $\int_0^a \frac{dx}{x^p}$

$= \lim_{c \to 0^+} \underbrace{\int_c^a \frac{dx}{x^p}}_{\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\Big]_c^a} = \lim_{c \to 0^+} \frac{1}{-p+1}(a^{-p+1} - c^{-p+1})$

$$\begin{cases} -p+1>0 \to p<1 \quad \text{همگرا} \to 0^{?} = 0 \\ -p+1<0 \to p>1 \quad \text{واگرا} \to 0^{-?} = \frac{1}{0} = \infty \end{cases}$$

$\int_0^a \frac{dx}{x} = \lim_{c \to 0^+} \int_c^a \frac{dx}{x}$

$\ln a - \ln c$

$= \ln a - (-\infty) = \infty$

"دنباله‌ها": دنباله رشته‌ای از اعداد است که از ترتیب معینی پیروی می‌کند.

دامنه دنباله‌ها اعداد طبیعی هستند

دنباله را به صورت $\{a_n\}: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ تعریف میکنیم متناظر با هر دنباله

دنباله یا مستقل تعداد کامل است که دامنه آن مجموعه مشتبی از اعداد صحیح است

می‌توان یک رابطه یا تابع پیدا کرد که در نقطهٔ $x=n$ به صورت $f(n)$ قابل

تعریف است. همچنین داریم $f(n)=a_n$ که a_n را جمله عمومی دنباله میگوییم.

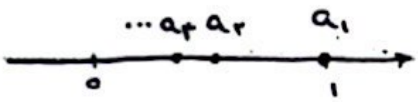
برای نمایش دنباله‌ها ۲ روش وجود دارد در روش اول با نقطه‌ها باید روی خط را است

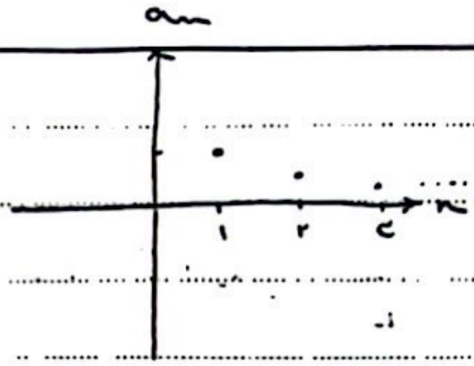
دنباله را نشان میدهیم و در روش دوم نقاط دنباله را روی صفحه دو بعدی نمایش میدهیم.

Subject:
Year: Month: Date:

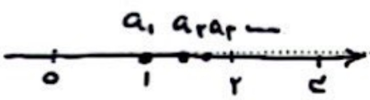
مثال:

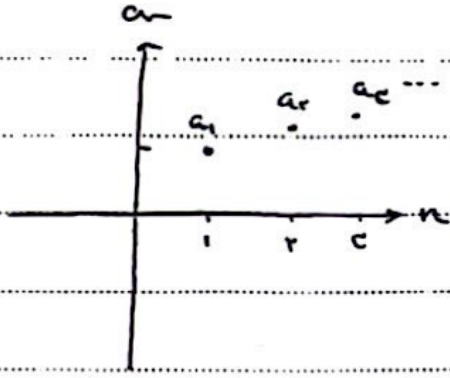
$a_n = \frac{1}{n}$ همگرا است





$a_n = \sqrt{n}$





نکته: تمام روابطی که در مورد کرانداری و یکنوایی توابع بیان کردیم در مورد دنباله ها نیز قابل استفاده هستند.

یکنوایی دنباله ها:

الف) دنباله $\{a_n\}$ را صعودی گوییم هرگاه: $\forall n: a_{n+1} \geq a_n$

ب) « « « نزولی گوییم هرگاه: $\forall n: a_{n+1} < a_n$

کرانداری دنباله ها: دنباله $\{a_n\}$ را کراندار از بالا گوییم هرگاه عدد مثبتی مانند M موجود باشد که $\forall M>0: |a_n|<M$

Subject:

Year: Month: Date:

باشد که $a_n < M$: $\forall M > 0$ چنانچه در بین کرانهای بالا، M کوچکترین

حقدار را داشته باشد آنرا کوچکترین کران بالا گوییم.

مثال: یکنوایی و کرانداری دنباله زیر را بررسی کنید.

$$a_n = \frac{n}{n+1} \cos n\pi \Rightarrow a_n = \frac{n}{n+1} (-1)^n$$

$a_1 = \frac{-1}{2}$

$a_2 = \frac{2}{3}$ → غیر یکنوا از صعودی به نزولی

$a_3 = -\frac{3}{4}$

$\vdots$

$|a_n| = \left|\frac{n}{n+1} (-1)^n\right| < 1$ → کوچکترین کران بالا

همواره مخرج بزرگتر از صورت است پس کسر همواره از ۱ کوچکتر است.

Subject:
Year: Month: Date:

(۲) اگر $f(x)$ تابع متناظر با دنباله $\{a_n\}$ باشد برای $x \geq 1$ داریم:

الف) $f'(x) \geq 0$ ← دنباله صعودی است.

ب) $f'(x) \leq 0$ ← دنباله نزولی است.

همگرایی دنباله ها: اگر با افزایش اندیس n جملات دنباله به سمت یک عدد معین میل کند دنباله را همگرا گوییم و داریم: $a_n \to l$ یا $\lim_{n\to\infty} a_n = l$

واگرایی در بینهایت (∞): اگر $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$ دنباله را واگرا به ∞ گوییم.

مثال:

$\{(-1)^{n+1}\}$ → × واگرا (یعنی در بین + و - هستند و به عدد خاصی میل نمی کند)

$\{\sqrt{n}\}$ → × واگرا به بینهایت $\lim \sqrt{n} = +\infty$

$\{1-\frac{1}{n}\} \to 1$

$\{\frac{1}{n}\} \to 0$

$\{\frac{3n+1}{5n-1}\}_1^{\infty} \to 3/5$

$\{\frac{\ln n}{n^2}\}_1^{\infty} \to 0$

$\{(-1)^n \frac{n}{2n+1}\}$ → $1/2$ و $-1/2$

Scanned with CamScanner

خواص دنباله‌ها:

اگر $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ و $\lim_{n\to\infty} b_n = B$ آنگاه داریم:

Subject:

Year: Month: Date:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = A \pm B$ 2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = AB$

3. $\lim\limits_{n\to\infty} k a_n = kA$ 4. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{A}{B}$ $(B \neq 0)$

حل:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{-1}{n} = -\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{n} = 1$

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4-7n^4}{n^4+3} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^4(\frac{4}{n^4}-7)}{n^4(1+\frac{3}{n^4})} = -7$

نکته: اگر دنباله‌ی $a_n + b_n$ دارای حد باشد الزاماً نمی‌توان نتیجه گرفت که دنباله‌های a_n و b_n نیز دارای حد هستند. مثل: $\underbrace{n}_{a_n} + \underbrace{1-n}_{b_n}$

قضیه فشردگی: فرض کنید $a_n \leq c_n \leq b_n$ اگر $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = l$

آنگاه: $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = l$.

مثال: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ را محاسبه کنید.

$a_n = \frac{n^{3/2}|\sin n|}{n^2}$ $\quad |\sin n| \leq 1$

$0 \leq a_n \leq \frac{n^{3/2}}{n^2} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

۱) $a_n = \frac{\cos n}{n} \longrightarrow -\frac{1}{n} \leq \frac{\cos n}{n} \leq \frac{1}{n} \rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

۳) $a_n = \frac{1}{2n} \longrightarrow 0 \leq \frac{1}{2n} \leq \frac{1}{n} \rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

۴) $a_n = (-1)^n \frac{1}{n} \longrightarrow -\frac{1}{n} \leq (-1)^n \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n} \rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

فرمول‌های کمکی نسبتاً حد:

۱) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

۲) $\lim_{n\to+\infty} (1+\frac{x}{n})^n = e^x \longrightarrow \lim_{n\to+\infty} (1+\frac{x}{n})^{nm} = e^{mx}$

۳) $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$ ۴) $\lim_{n\to\infty} x^{1/n} = 1 \quad (x>0)$

۵) $\lim_{n\to\infty} x^n = 0 \quad (|x|<1)$ ۶) $\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$

نکته: $\sqrt[a\times n]{(an)!} \cong (\frac{an}{e})^a$, $\sqrt[n]{n!} \cong \frac{n}{e}$

قوانین رشد در بی‌نهایت: $n^n \gg n! \gg a^n \gg n^a \gg \ln n$

حل :

① $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln n}{n} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = \dfrac{\infty}{\infty} \xrightarrow{H} \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{1}{x}}{1} = 0$

قضیه $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln n}{n} = 0$ همگرا

② $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n}{5n} = \dfrac{\infty}{\infty} \xrightarrow{H} \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n \ln 2}{5} = \infty$ واگرا

Subject:

Year: Month: Date:

③ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-1+2}{n-1}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n-1}\right)^n$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n-1}\right)^{n-1}\underbrace{\left(1+\cancel{\frac{2}{n-1}}\right)}_{1}=e^2$

نکته: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=e^x$

راه دوم: $y=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n \xrightarrow{\text{ln می‌گیریم}} \ln y=\lim\limits_{n\to\infty}\ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty} n\ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)$

$=\infty\times 0=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)}{\frac{1}{n}}\overset{H}{=}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{-2}{n^2-1}}{\frac{-1}{n^2}}=2\rightarrow \ln y=2\rightarrow y=e^2$

حل ④ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n^2}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2\ln n}{n}=2\times 0=0$

⑤ $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{2}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(n^{\frac{1}{n}}\right)^2=1$

نکته: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$

حل ⑥ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-2}{n}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{-2}{n}\right)^n=e^{-2}$

نکته: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)=e^x$

سری های نامتناهی :

به مجموع تعداد نامتناهی از جملات یک دنباله سری نامتناهی می‌گوییم و آن را با نماد $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = a_1+a_2+\dots+a_n+\dots$ نشان می‌دهیم.

اگر تعداد جملات دنباله را به صورت متناهی در نظر بگیریم سری حاصل متناهی خواهد بود. برای هر سری مجموع جزئی را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$S_1=a_1 \qquad S_2=a_1+a_2 \qquad S_3=a_1+a_2+a_3$ مجموع جزئی n ام $S_n=a_1+a_2+\dots+a_n=\sum_{i=1}^{n} a_i$

سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ را همگرا به S گوییم هرگاه $\lim_{n\to\infty} S_n = S$. در غیر این صورت سری واگرا می‌باشد.

آزمون جمله n ام برای تشخیص واگرایی سری : برای تمام سری‌ها به جز سری‌های خاص

سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ را واگرا گوییم اگر $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ یا وجود نداشته باشد. ← برابر با عددی به جز صفر باشد یا موجود نباشد

نکته: شرط $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ برای همگرایی سری شرطی لازم و نه کافی است یعنی ممکن است $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ باشد اما سری واگرا شود.

مثال: همگرایی سری‌های زیر را بررسی کنید.

A) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} \qquad a_n=\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = 1 \neq 0$ سری واگرا

B) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \qquad a_n=(-1)^n=\begin{cases}1 & \text{زوج } n\\ -1 & \text{فرد } n\end{cases} \qquad \lim_{n\to\infty} a_n$ وجود ندارد، پس سری واگرا است

سری های خاص :

۱. سری تلسکوپی یا ادغامی: در این سری جملات به صورت $\underbrace{a_k - a_{k+1}}_{\text{شرط اصلی}}$ ظاهر می‌شوند. (حاصل تفاضل دو جمله متوالی)

مثال: همگرایی سری‌های زیر را بررسی کنید.

A) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\overset{a_n}{1}}{n(n+1)} \qquad$ شرط لازم و نه کافی $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n(n+1)}=0 \qquad \frac{1}{n(n+1)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+1}=\overbrace{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}}^{a_n-a_{n+1}}$

$$\begin{array}{ll} n=1 & 1-\frac{1}{2}\\ n=2 & \frac{1}{2}-\frac{1}{3}\\ n=3 & \frac{1}{3}-\frac{1}{4}\\ \vdots & \\ n-1 & \frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\\ n & \frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\end{array}$$

$S_n = 1-\frac{1}{n+1} \qquad \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$ ✓ سری همگراست

۱. $\lim_{n\to\infty} a_n$ را حساب کن
۲. نوع سری را تشخیص بده
۳. S_n را بیاب
۴. $\lim_{n\to\infty} S_n$ را حساب کن

B) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\sqrt{n+1})+(n+1)\sqrt{n}}$ $\quad \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \quad \frac{1}{n(\sqrt{n+1})+(n+1)\sqrt{n}} \times \frac{n(\sqrt{n+1})-(n+1)\sqrt{n}}{''} = \frac{n(\sqrt{n+1})-(n+1)\sqrt{n}}{\underbrace{n^2(n+1)-(n+1)^2 n}_{n(n+1)(\cancel{n}-\cancel{n}-1)}}$

$n=1 \quad 1-\cancel{\frac{1}{\sqrt{2}}}$ $\qquad S_n = 1-\frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{(n+1)\sqrt{n}-n(\sqrt{n+1})}{n(n+1)} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$

$n=2 \quad \cancel{\frac{1}{\sqrt{2}}} - \cancel{\frac{1}{\sqrt{3}}}$

$\vdots$

$n-1 \quad \cancel{\frac{1}{\sqrt{n-1}}} - \cancel{\frac{1}{\sqrt{n}}}$ $\qquad \lim_{n\to\infty} S_n = 1$ ✓ همگراست

$n \quad \cancel{\frac{1}{\sqrt{n}}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$

2. سری هندسی: فرم کلی نمایش یک سری هندسی به صورت زیر است:

$$\sum_{i=0}^{\infty} aq^i = a + aq + aq^2 + \dots$$

که در آن a جمله اول سری و q قدر نسبت می باشد. گوییم سری هندسی همگراست هرگاه $|q|<1$ و اگر $|q|\geq 1$ سری واگراست. اگر سری هندسی همگرا باشد به $\frac{a}{1-q}$ همگراست. q هم می تواند مثبت و هم می تواند منفی باشد

حاصل سری هندسی

مثال: همگرایی سری های زیر را بررسی کنید.

A) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{4^n} = \left(\frac{3}{4}\right)^n = 1 + \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \dots \quad a=1 \quad q=\frac{3}{4}<1$ سری همگراست: $\frac{1}{1-\frac{3}{4}} = 4$

B) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{8^n}{3^n} = \left(\frac{8}{3}\right)^n = 1 + \frac{8}{3} + \left(\frac{8}{3}\right)^2 + \dots \quad a=1 \quad q=\frac{8}{3}>1$ سری واگراست

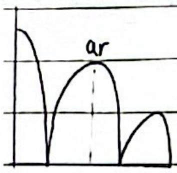
C) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{3^n} = \left(\frac{-2}{3}\right)^n = 1 + \left(\frac{-2}{3}\right) + \left(\frac{-2}{3}\right)^2 + \dots \quad a=1 \quad q=\frac{-2}{3} \quad |q|=\frac{2}{3}<1$ سری همگراست: $\frac{1}{1-(\frac{-2}{3})} = \frac{3}{5}$

D) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n^3}{4n^3+1} = 0 + \frac{2}{5} + \frac{16}{33} + \dots \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^3}{4n^3+1} = \frac{1}{2} \neq 0$ سری هندسی نیست شرط لازم همگرایی را ندارد پس واگراست

E) $\sum_{n=0}^{\infty} x^{[\frac{n}{2}]} y^{[\frac{n+1}{2}]} \quad 0<x,y<1 \quad = 1+y+xy+xy^2+x^2y^2+x^2y^3+\dots$ $\quad a=1+y \quad q=xy<1$ همگراست

$(1+y)+xy(1+y)+x^2y^2(1+y)$ $\quad$ همگرا به $\frac{1+y}{1-xy}$

مثال: توپی از ارتفاع a متری سطح زمین پرتاب می شود و در هر بار برخورد با زمین با نسبت r ارتفاع آن کاهش می یابد، مطلوب است یافتن طول مسافتی که توپ طی می کند تا متوقف شود.



$\underset{\times r}{a + 2ar} \underset{\times r}{+} 2ar^2 + 2ar^3$ $\quad$ جمله اول $= 2ar$

$q=r<1$ سری همگراست

$a + \frac{2ar}{1-r}$ همگرا به

مثال: محاسبه ترتیب اعداد اعشاری با دوره گردش

$5.2323\dots = 5 + \frac{23}{100} + \frac{23}{(100)^2} + \dots \quad q=\frac{1}{100}<1$ سری همگراست

$\times \frac{1}{100}$

$5 + \frac{23}{100}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{100}}\right)$

بسم الله الرحمن الرحیم

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-2}{3}\right)^n = 1 + \left(-\frac{2}{3}\right) + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \cdots$$

$a = 1$

$q = -\frac{2}{3}$ $\quad |q| = \frac{2}{3} < 1 \xrightarrow{\text{سری همگراست}} \frac{1}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n^3}{4n^3+1} = 0 + \frac{2}{5} + \frac{16}{33} + \cdots$$

سری هندسی نیست

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n^3}{4n^3+1} = \frac{1}{2} \neq 0$ شرط لازم همگرایی را ندارد پس واگراست.

الگوی سری هندسی: $\sum_{i=0}^{\infty} aq^i = a + aq + aq^2 + aq^3 + \cdots$

که در آن a جمله اول سری و q قدر نسبت می باشد. الگوی سری هندسی همگراست هرگاه $|q| < 1$ و اگر $|q| \geq 1$ سری واگراست.

اگر سری هندسی همگرا باشد به $\frac{a}{1-q}$ همگراست.

مثال: همگرایی سری های زیر را بررسی کنید.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{4^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = \underset{\text{جمله اول}}{1} + \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \cdots$$

$a = 1$

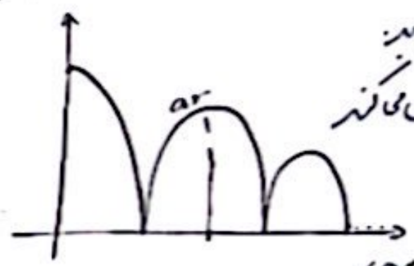
$q = \frac{3}{4} < 1 \longrightarrow$ سری همگراست : $\frac{1}{1-\frac{3}{4}}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{8^n}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{8}{3}\right)^n = 1 + \frac{8}{3} + \left(\frac{8}{3}\right)^2 + \cdots$$

$a = 1$

$q = \frac{8}{3} > 1 \longrightarrow$ سری واگراست.

مثال: توپی از ارتفاع a متری سطح زمین پرتاب می‌شود و در هر بار برخورد با زمین با نسبت r ارتفاع آن کاهش می‌یابد. مطلوبست یافتن کل مسافتی که توپ طی می‌کند تا متوقف شود.



سری هندسی

$$\boxed{a} + \underbrace{2ar + 2ar^2 + 2ar^3 + \cdots}_{\times r \quad \times r \quad \times r}$$

جمله اول $= 2ar$

$q = r < 1$

سری همگرا است

$$a + \frac{2ar}{1-r}$$

همگرا

اعداد اعشاری با دوره گردش

مثال:

$5.23232323\ldots$

$$= 5 + \frac{23}{100} + \frac{23}{(100)^2} + \frac{23}{(100)^3} + \cdots = \boxed{5} + \frac{23}{100}\left(1 + \frac{1}{100} + \frac{1}{(100)^2} + \cdots\right)$$

$a = 1,\ q = \frac{1}{100} < 1$

همگرا

$$= 5 + \frac{23}{100}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{100}}\right)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{\left[\frac{n}{2}\right]} y^{\left[\frac{n+1}{2}\right]} \qquad 0 < x, y < 1$$

@Mp optimization

$n=0$	1
$n=1$	y
$n=2$	xy
$n=3$	xy^2
$n=4$	x^2y^2
$n=5$	x^2y^3
$\vdots$	

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{\left[\frac{n}{2}\right]} y^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}$$

$$= 1 + y + \underbrace{(xy + xy^2)}_{xy(1+y)} + \underbrace{(x^2y^2 + x^2y^3)}_{x^2y^2(1+y)} + \cdots$$

$$= (1+y) + xy(1+y) + x^2y^2(1+y) + \cdots$$

$a = 1+y$

$q = xy \xrightarrow{0<x,y<1} |q| < 1$ سری همگرا است

$$\frac{1+y}{1-xy}$$ سری همگرا:

Subject: $\sum a_n = A \qquad \sum b_n = B$

Year: Month: Date:

ترکیب سری‌ها: فرض کنید سری $\sum a_n$ به A و سری $\sum b_n$ به B همگرا باشد. آنگاه

داریم: ۱- قانون جمع: $\sum a_n + \sum b_n = A+B$

۲- قانون تفاضل: $\sum a_n - \sum b_n = A-B$

۳- قانون ضرب در اعداد ثابت: $\sum k a_n = k\sum a_n = kA,\ k\in \mathbb{Z}$

نتیجه: اگر $\sum a_n$ همگرا و $\sum b_n$ واگرا باشد $\sum (a_n+b_n)$ و یا $\sum (a_n-b_n)$ واگراست. و هر مضرب ثابت ناصفر از یک سری واگرا، واگراست.

نکته: می‌توان تعداد متناهی جمله از یک سری حذف یا به یک سری اضافه کرد بدون آنکه همگرایی یا واگرایی سری تغییر کند.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{5^n}$$

اندیس‌گذاری مجدد سری‌ها: تا زمانیکه ترتیب جملات سری برقرار است می‌توان برای سری اندیس‌گذاری مجدد انجام داد. داریم:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1-h}^{\infty} a_{n+h} = \sum_{n=1+h}^{\infty} a_{n-h}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \ , \ \sum_{n=-4}^{\infty} \frac{1}{2^{n+4}}$$

مثال: مجموع سری‌های زیر را محاسبه کنید.

$$① \sum_{n=1}^{\infty} \frac{۳^{n-1}-1}{۶^{n-1}} = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{۲^{n-1}}}_{\text{که سری هندسی است}} - \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{۶^{n-1}}}_{\text{که سری هندسی است}} = \frac{1}{1-\frac{1}{۲}} - \frac{1}{1-\frac{1}{۶}}$$

Subject:
Year: Month: Date:

④. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4}{2^n} = 4\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 4 \times \frac{1}{1-\frac{1}{2}}$ $\qquad \frac{a}{1-q}$ حد مجموع سری هندسی

که سری هندسی

آزمون های بررسی همگرایی یا واگرایی سری ها:

1. آزمون مقایسه: فرض کنید $\sum a_n$ و $\sum b_n$ سری هایی با جملات مثبت باشند نیز

$0 \le a_n \le b_n$ اگر $\sum a_n$ واگرا باشد $\sum b_n$ نیز واگرا خواهد بود و اگر $\sum b_n$

همگرا باشد $\sum a_n$ نیز همگرا خواهد بود.

مثال: همگرایی یا واگرایی سری های زیر را بررسی کنید.

① $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n+1} \le \sum \frac{1}{2^n}$

همگراست ← همگراست ← $|q|<1$ با سری هندسی

$|\cos n| \le 1$

② $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\cos n}{2n}\right)^2 \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2}$

همگراست

همگراست ← $p=2>1$ با p سری

③ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{5n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n-\frac{1}{5}} > \sum \frac{1}{n}$

واگرا ← واگرا ← سری هارمونیک

FARHANG

$$\sum \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \cdots$$

$$1 + \sum \frac{1}{2^n} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \cdots$$

Subject:

Year: Month: Date:

④ $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ — قوانین رشد : $n! \gg a^n$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \leqslant 1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$

سری هندسی با $|q|<1$ ← همگرا

همگراست

همگراست

⑤ $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n} \geqslant \sum \frac{1}{n}$ — با توجه به نمودارهای $y=x$ و $y=\ln x$ که همیشه بالاتر است . $\ln n < n$

واگراست ← سری هارمونیک واگرا

۲) آزمون مقایسه حدی : فرض کنید $\sum b_n$ و $\sum a_n$ سری‌هایی با جملات مثبت باشند و

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$ ، ۳ حالت رخ میدهد :

الف) $L>0$: $\sum a_n$ و $\sum b_n$ هم نوع هستند.

ب) $L=0$ و $\sum b_n$ همگرا : $\sum a_n$ نیز همگرا است.

ج) $L=\infty$ و $\sum b_n$ واگرا : $\sum a_n$ نیز واگرا است.

Subject: صورت سوال جمله عمومی است
Year: Month: Date:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n+1}{(n+1)^2}$, $\dfrac{2n+1}{(n+1)^2} \simeq \dfrac{2n}{n^2} = \dfrac{1}{n}$

(2) $b_n = \sum \dfrac{1}{n} \longrightarrow$ سری هارمونیک $\longrightarrow$ واگراست

(1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{2n+1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2+n}{(n+1)^2} = 2 > 0$

چون $0 <$ است $\leftarrow$ $\sum a_n$ و $\sum b_n$ هم نوع هستند، چون $\sum b_n$ واگراست پس $\sum a_n$ نیز واگراست.

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n-1}$ $b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n} \to$ سری هندسی با $\frac{1}{2}$ همگرا

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1}{2^n-1}}{\frac{1}{2^n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n}{2^n-1} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{1-\frac{1}{2^n}} = 1 > 0 \longrightarrow$ همگراست $\sum a_n$

(2) $\sum_{n=2}^{\infty} \dfrac{1+n\ln n}{n^2+5}$ (a_n) $\quad n \geq 3$ $\quad \dfrac{1+n\ln n}{n^2+5} \simeq \dfrac{n\ln n}{n^2} \simeq \dfrac{\ln n}{n} > \dfrac{1}{n}$

$b_n = \sum \dfrac{1}{n} \longrightarrow$ سری هارمونیک $\longrightarrow$ واگرا

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1+n\ln n}{n^2+5}}{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+n^2\ln n}{n^2+5} = \infty$

$L=\infty$ و $\sum b_n$ واگراست $\longleftarrow$ $\sum a_n$ واگراست.

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln n}{n^{3/2}}$ (a_n) $\quad \dfrac{\ln n}{n^{3/2}} < \dfrac{n^{1/4}}{n^{3/2}} = \dfrac{1}{n^{5/4}}$ $\quad \ln n \ll n^2$

به حالت یکی کمیت
ساده‌تر کنم تا یکی از
۳ شرط بالا رخ دهد.

$b_n = \sum \dfrac{1}{n^{5/4}} \longrightarrow$ سری p $\quad p = \frac{5}{4} > 1$ پس همگراست

FARHANG

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{\ln n}{n^{3/2}}}{\frac{1}{n^{5/4}}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln n}{n^{1/4}} = 0$

Subject:

Year: Month: Date:

طبق قوانین رشد یا Hop. $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\ln n}{n^{3/2}}}{\frac{1}{n^{5/4}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{5/4}\ln n}{n^{3/2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^{1/4}} = 0$$

۳- آزمون نسبت: فرض کنید $\sum a_n$ سری با جملات مثبت باشد و $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$

آنگاه داریم: الف) $l<1$: سری همگراست. ب) اگر $l>1$ یا نامتناهی: سری واگراست.

ج) $l=1$: آزمون جواب نمی‌دهد

① $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(3n)!\,6^n} =$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(2n+2)(2n+1)\cancel{(2n)!}}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)\cancel{(3n)!}\times \cancel{6^n}\times 6}}{\frac{\cancel{(2n)!}}{\cancel{(3n)!}\,\cancel{6^n}}} = 0<1$$ همگراست

② $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+5}{3^n}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^{n+1}+5}{3^{n+1}}}{\frac{2^n+5}{3^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}+5}{3(2^n+5)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n(2+\frac{5}{2^n})}{3\times 2^n(1+\frac{5}{2^n})} = \frac{2}{3}<1$$ همگرا

④ $a_n = \dfrac{(2n)!}{n!\,n!}$ $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(n+1)n!(n+1)n!} \cdot \dfrac{n!\,n!}{(2n)!} = 4 > 1$ واگراست.

Subject:

Year: Month: Date:

③ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^4 e^{-n^2}$ یادآوری: $e^{-\infty} = 0 = \dfrac{1}{e^{\infty}}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^4 e^{-(n+1)^2}}{n^4 e^{-n^2}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^4 e^{-(2n+1)} = 1 \times 0 = 0 < 1$$ همگرا

آزمون ریشه (کوشی): فرض کنید $\sum a_n$ سری با جملات مثبت باشد و $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$ باشد داریم: الف) $l<1$: سری همگراست. ب) $l>1$ یا نامتناهی: سری واگراست

ج) $l=1$: آزمون نتیجه نمی‌دهد.

① $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{n+1}{n+2}\right)^{n^2-1}$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n^2-1}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{\frac{n^2-1}{n}} = 1^{\infty}$$

$$= \lim_{n\to\infty} e^{\left(\frac{n+1}{n+2}-1\right)\left(\frac{n^2-1}{n}\right)} = e^{-1} = \frac{1}{e} < 1$$ همگراست

② $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(2n)!}{(3n)!\,4^n}$ $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{(2n)!}{(3n)!\,6^n}}$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{6} \times \frac{\left(\frac{2n}{e}\right)^2}{\left(\frac{3n}{e}\right)^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{6} \cdot \frac{4n^2e^3}{27n^3e^2} = 0 < 1$$ همگراست

نکته: $\sqrt[n]{(an)!} = \left(\dfrac{an}{e}\right)^a$

FARHANG

Scanned with CamScanner

Subject:

Year: Month: Date:

③ $a_n = \begin{cases} \frac{n}{2^n} & ، n \text{ زوج} \\ \frac{1}{2^n} & ، n \text{ فرد} \end{cases}$

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{2} = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2^n} \leq a_n \leq \frac{n}{2^n} \longrightarrow \frac{1}{2} \leq \sqrt[n]{a_n} \leq \frac{\sqrt[n]{n}}{2} \longleftarrow$ قضیه فشردگی

$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1}{2} < 1$ سری همگرا است

⑤ آزمون انتگرال: فرض کنید $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ داده شده باشد اگر برای $n \geq N$ تابع $f(n) = a_n$ تابعی پیوسته، مثبت و نزولی باشد آنگاه سری $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ و $\int_N^{\infty} f(x)dx$ هم نوع هستند (یا هر دو همگرا یا هر دو واگرا).

قضیه: سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ با جملات نامنفی همگرا است اگر و فقط اگر مجموع‌های جزئی آن از بالا کراندار باشند.

مثال: همگرایی یا واگرایی سری‌های زیر را بررسی کنید.

① $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

$S_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} = f(1) + f(2) + \dots + f(n) < 1 + \int_1^n \frac{1}{x^2} dx$

$< 1 + \underbrace{\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx}_{=1} = 2$

FARHANG

Subject:
Year: Month: Date:

هم‌نوع‌اند $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$ و $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}$ ← پیوسته، مثبت و نزولی $f(x)=\frac{1}{x^2}$

$\rightarrow \int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx = 1 \xrightarrow[\text{انتگرال } p]{\text{همگراست}} \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}$ همگراست

نکته: دیدیم که در p-سری‌ها شرط همگرایی $p>1$ بود. علت را در زیر بررسی میکنیم:

$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^p}$ در شرایط آزمون انتگرال صدق میکند. $\frac{1}{\infty} = \frac{1}{\infty^+} = 0$

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}dx = \lim_{c\to\infty}\int_1^c \underbrace{\frac{dx}{x^p}}_{\frac{x^{-p+1}}{-p+1}} = \lim_{c\to\infty}\frac{1}{-p+1}\left(\overbrace{c^{-p+1}}^{\text{باید صفر شود}} - \underbrace{1^{-p+1}}_{1}\right) \Rightarrow \begin{cases}-p+1<0 \\ \Downarrow \\ p>1\end{cases}$$ همگراست

(۲) $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2+1}$ $\quad f(x)=\frac{1}{x^2+1}$ پیوسته، مثبت، نزولی

$$\Rightarrow \int_1^\infty \frac{1}{x^2+1}dx = \lim_{c\to\infty}\int_1^c \underbrace{\frac{1}{1+x^2}}_{\tan^{-1}x}dx = \lim_{c\to\infty} \tan^{-1}(c) - \tan^{-1}(1)$$
$$= \frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

همگراست ← $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2+1}$ نیز همگراست.

(3) $\sum_{n=3}^\infty \frac{\ln n}{n}$ $\quad f(x)=\frac{\ln x}{x}$ $\quad x>1$ نامنفی پیوسته

$f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}<0$ $\quad x>e$

$\int_1^\infty \frac{\ln x}{x}dx = +\infty$ واگراست

سری‌های متناوب: سری‌هایی به فرم $\sum_{n=1}^\infty (-1)^n a_n$ را سری متناوب گوییم که جملات آن بصورت متناوب مثبت و منفی تغییر میکنند.

FARHANG

Subject:
Year: Month: Date:

④ آزمون بررسی همگرایی سری‌های متناوب (لایب نیتز): سری متناوب $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$

همگرا است هرگاه: a_n نزولی باشد $a_{n+1} \le a_n$ و $a_n \to 0$ (a_n همگرا به صفر باشد) و $a_n > 0$ (a_n مثبت باشد)

$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

مثال: ① $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ $\quad a_n = \frac{1}{n} \Rightarrow \begin{cases} a_n > 0 \\ a_n \to 0 \\ \frac{a_{n+1}}{a_n} \le 1 \end{cases}$ طبق آزمون سری متناوب $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ همگرا است.

② $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n}{n^2+1}$ $\quad a_n = \frac{n}{n^2+1} \Rightarrow \begin{cases} a_n > 0 \\ a_n \to 0 \Rightarrow \text{"} \quad \text{"} \\ \frac{a_{n+1}}{a_n} \le 1 \end{cases}$ $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ همگرا است.

$a'_n = \frac{n^2+1-2n^2}{(n^2+1)^2} = \frac{1-n^2}{(n^2+1)^2} \le 0$

تعریف: ① اگر $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ همگرا باشند، سری را همگرای مطلق گوییم.

② اگر $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ همگرا و $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ واگرا باشند، سری را همگرای مشروط گوییم.

① $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$ طبق ۴ همگرا ، و $\sum \left| \frac{(-1)^n}{n^2} \right| = \sum \frac{1}{n^2}$ همگرا است ← سری p دار $p=2$

پس $\Rightarrow \sum \frac{(-1)^n}{n^2}$ همگرای مطلق است

② $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ طبق ۴ همگرا ، $\sum \left| \frac{(-1)^n}{n} \right| = \frac{1}{n}$ سری همساز که واگرا است

پس $\Rightarrow \sum \frac{(-1)^n}{n}$ همگرا مشروط

مثال ③ $\sum \frac{\cos n}{n^2}$ $\quad \left| \frac{\cos n}{n^2} \right| \le \frac{1}{n^2} \to$ همگرا $\quad \sum \left| \frac{\cos n}{n^2} \right|$ [illegible]

نکته: اگر سری $\sum a_n$ همگرای مطلق باشد همگرا نیز خواهد بود اما عکس این رابطه الزاماً برقرار نیست.

سری‌های توانی: اگر x_0 عددی حقیقی و $\{a_n\}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی باشد آنگاه power series

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ را سری توانی حول نقطه x_0 می‌نامیم و a_nها را ضرایب سری در نظر می‌گیریم. نقاطی که سری به ازای آن‌ها همگراست را ناحیه همگرایی معرفی می‌کنیم.

قضیه: اگر $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ برای $x=c\neq 0$ همگرا باشد آنگاه برای $|x|<|c|$ سری نیز همگرای مطلق است و اگر برای $x=d\neq 0$ واگرا باشد آنگاه برای $|x|>|d|$ سری نیز واگراست.

شعاع همگرایی: برای سری $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ شعاع همگرایی از روابط زیر حاصل می‌شود.

$$\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \quad \text{یا} \quad \frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$$

نکته: اگر سری توانی بصورت $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^{kn}$ باشد شعاع از روابط زیر محاسبه می‌شود:

$$\frac{1}{R^k}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \quad \text{یا} \quad \frac{1}{R^k}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$$

$$\sqrt[n]{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \sqrt[n]{\frac{1}{n^{\frac12}}} = \left(n^{-\frac12}\right)^{\frac1n}$$

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n^{\frac12}}} = \frac{1}{n^{\frac12 \cdot \frac1n}}$$

Subject:
Year: Month: Date:

برای یافتن بازه همگرایی تحت شعاع همگرایی را پیدا میکنیم سری به ازای $|x-x_0|<R$ همگراست

در بین نقاط ابتدا و انتهای بازه را در سری جایگذاری کرده و همگرایی سری‌های بدست آمده را

بررسی میکنیم در صورت همگرایی آن نقاط را نیز به بازه همگرایی اضافه میکنیم

شعاع و بازه همگرایی:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{2^n\sqrt{n}} \qquad a_n = \frac{1}{2^n\sqrt{n}}$$

$$\frac1R = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^n\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac12 \times \frac{1}{\underline{n^{\frac{1}{2n}}}} = \frac12$$

$\Rightarrow R=2$ $\qquad \underset{\text{همگرا}}{|x-2|<2} \Rightarrow 0<x<4$

$x=0:\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{2^n\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \to$ سری متناوب همگراست

$\Rightarrow$ بازه همگرایی $[0,4)$

$x=4:\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{2^n\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \to$ p-سری با $p=\frac12$ و $p<1$ واگراست

شعاع همگرایی:

① $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} x^n$

$$\frac1R = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{(n!)^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{2n}{e}\right)^2}{\left(\frac{n}{e}\right)^2} = 4$$

$\to R=\frac14 \to |x|<\frac14$ همگرا $\qquad x=\frac14 \ldots \quad x=-\frac14 \ldots$

Subject:
Year. Month. Date

/ ۲) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{2^n n!}$ $\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^n \underbrace{n!}_{\frac{n}{e}}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \times \frac{e}{n} = 0$

$\Rightarrow R = \infty$ بازه همگرایی : $(-\infty , +\infty)$

۳) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n} (2x+1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n} 2^n (x+\frac{1}{2})^n$

$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{6^{n+1}}{n+1}}{\frac{6^n}{n}} \right| = 6 \Rightarrow R = \frac{1}{6}$

۵) $\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n$ $\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{e} = \infty \rightarrow R = 0 \rightarrow x = 0$

۴) $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{n+2}{n+1})^{n^2} x^{2n}$

$\frac{1}{R^2} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{(\frac{n+2}{n+1})^{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \underbrace{(\frac{n+2}{n+1})^n}_{1^\infty} = \lim_{n\to\infty} e^{(\frac{n+2}{n+1}-1)n} = e^2$

$\Rightarrow R = \frac{1}{e}$

/ ۵) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ بازه و شعاع همگرایی :

$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{(-1)^n}{n+1}}{\frac{(-1)^{n-1}}{n}} \right| = 1 \rightarrow R = 1$

$|x| < 1 \rightarrow -1 < x < 1$ بازه همگرایی : $(-1 , 1]$

$x = 1 :$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ سری متناوب همگرا

$x = -1 :$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (-1)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n-1}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ سری واگرا (هارمونیک)

FARHANG

حاصلضرب سری های توانی

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots + b_n x^n + \dots$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \times \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \boxed{C_n} x^n \qquad C_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$$

$$C_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \dots + a_n b_0$$

فرض کنید $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ و $|x|<1$، سری متناظر با

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)} \cdot \frac{1}{(1-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots \\ \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots \end{array}} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$$

$$C_n = (\underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{n+1}) = n+1$$

جواب: $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) x^n$

بسم الله الرحمن الرحیم

$$f(x)=\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n \qquad |x|<1$$

$$\hookrightarrow f'(x)=\frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$$

$$\hookrightarrow f''(x)=\frac{2}{(1-x)^3}=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)x^{n-2}$$

$$\frac{x^4}{1+x^2}=x^4\times\frac{1}{1-(-x^2)} \qquad \frac{1}{1-(-x^2)}=\sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$$

مشتق گیری از سری:

$$\sum_{n=0}^{\infty}x^n$$

$$\xrightarrow{\text{مشتق}}\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$$

$$\xrightarrow{\text{مشتق}}\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)x^{n-2}$$

انتگرال گیری سری:

$$\int\sum_{n=0}^{\infty}x^n\,dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

مهم جدا

بسم الله الرحمن الرحيم

سري تيلور

نقطة x_0

$$f(x) = f(x_0) + (x-x_0) f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \cdots$$

$$\xrightarrow{\text{سري تيلور}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0)$$

$$\xrightarrow[\text{بسط مک لورن}]{x_0=0} f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \cdots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0)$$

$f(x) = \sin x$

بسط تيلور، حل x_0 : $f(x) = \sin x_0 + (x-x_0)\cos x_0 + \frac{(x-x_0)^2}{2!}(-\sin x_0) + \frac{(x-x_0)^3}{3!}(-\cos x_0) + \cdots$

بسط مک لورن $x_0=0$: $f(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

$f(x) = e^x$

$f^{(n)}(x) = e^x \Rightarrow f^{(n)}(0) = e^0 = 1$

بسط مک لورن : $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

$$= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

$f(x) = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \xrightarrow{x \to -x} e^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!}$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

$$1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \frac{1}{2}\left(2 + 2\left(\frac{x^2}{2}\right) + 2\left(\frac{x^4}{4!}\right) + \cdots\right)$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$\xrightarrow{x \to -x} \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$$

$$\xrightarrow{x \to -x^2} \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$$

$$\boxed{\frac{x}{1-x^2}}$$

$(x \to x^2)$

$$\frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$$

$$\frac{x}{1-x^2} = x(1 + x^2 + x^4 + \cdots) = x + x^3 + x^5 + \cdots$$

Scanned with CamScanner